

密级: _____



中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

博士学位论文

规范/引力对偶的应用研究

作者姓名: _____ 卜严严

指导教师: _____ 杨金民 研究员

中国科学院理论物理研究所

学位类别: _____ 理学博士

学科专业: _____ 理论物理

培养单位: _____ 中国科学院理论物理研究所

2013年5月

**Investigations on the Applications of
Gauge/Gravity Duality**

Yanyan Bu

**A Dissertation Submitted to
University of Chinese Academy of Sciences
In partial fulfillment of the requirement
For the degree of
Doctor of Science**

**Institute of Theoretical Physics,
Chinese Academy of Sciences**

May, 2013

摘 要

规范/引力对偶是一个强有力的数学工具，它将强耦合的规范场论与弱耦合的经典引力体系联系起来。具体说来，场论这边的规范群的颜色数目需要很大，而引力系统具有负的宇宙学常数。在这篇论文中，我应用规范/引力对偶这个工具研究了强耦合场论体系的各种现象，主要包括：强耦合的夸克胶子等离子体、超导与超流、磁场诱导的栅格结构与超导涡旋、全息对偶理论中的平移对称性破缺等。

本论文中研究的物理体系可作为描述下列物理行为的一些有用的模型，这主要包括：处于量子临界点附近的超流相，夸克胶子等离子体态(它是在相对论重离子碰撞中产生的，这种等离子体态对应于量子色动力学的退禁闭相)，有大磁场存在时的量子色动力学的真空。具体说来，我的研究内容主要分为如下三个方向。

首先，我研究了如何用全息对偶的方法描述强耦合夸克胶子等离子体的一些重要性质。为了实现这一目的，我应用非临界的Sakai-Sugimoto模型作为强耦合夸克胶子等离子体的一个引力对偶，计算了全息等离子体中夸克物质的流体动力学性质、重味夸克的扩散以及全息等离子体的内部结构函数。为了进一步揭示这种全息方法的一些普适属性，我用几个不同的引力对偶模型研究了强耦合夸克胶子等离子体中自发发射光子的强度问题，这一信号可作为这种等离子体的重要探针。有趣的是，在这些引力对偶框架下，引入一个磁场分量将会很自然地实现光子发射谱的各向异性行为。

另外一个研究方向是超导和超流的全息实现。应用渐进的Lifshitz黑洞，我研究了动力学临界指数 z 对于全息超导相变的临界温度和凝聚算符的影响。同时，在对称性破缺的超导相我详细计算了电荷的输运性质。结果表明，动力学临界指数 z 非平庸地改变了该相变临界温度、凝聚和交流电导率。另一方面，在全息超导这个领域以前的研究主要集中于二维或者三维空间的情形，我利用交叉D膜构建了 $(1+1)$ 维时空中的 p 波全息超导体。研究发现，源与算符真空期望值的辨识是不平庸的，而且我们需要一个全新的方案定义相关物理量，这将直接关系到凝聚与电导率的性质。

在规范/引力对偶的框架下，人们通常假设全息几何在共形边界的空间方

向上是平移不变的。这种假设的一个重要结果就是，应用这种对偶方法计算交流电导率的时候总会出现一个尖峰(peak)，即使是在 $U(1)$ 对称性没有破缺的情形下。当时，有作者认为这个不自然的peak可以通过破坏这个平移对称性来祛除；之后，这个观点引起了广泛的关注。另一方面，相关研究表明在全息框架下一个较大的磁场能够使一个具有平移对称性的系统出现不稳定性，而且新的基态需要破坏这个平移对称性和 $U(1)$ 对称性。与合作者一起，我们建立了一个这样的基态，它在垂直于磁场的空间方向是一个类似于第二类超导体的Abrikosov栅格结构，而且这个栅格结构由带电矢量算符凝聚生成的具有三角格子形状的超导涡旋组成。

关键词： AdS/CFT对应, 规范/引力对偶, 夸克胶子等离子体, 电磁信号, 超导与超流

Abstract

The gauge/gravity duality is a powerful mathematical tool that relates strongly interacting gauge theories with large numbers of colors to classical weakly coupled gravitational theories with negative cosmological constant. In this dissertation, I use the gauge/gravity duality to investigate various phenomena of strongly coupled field theories. Of particular interest are the strongly coupled quark-gluon plasma (sQGP), high- T_c superconductor and superfluid, magnetic field induced lattice structure and superconducting vortex, translational symmetry breaking in holography.

The systems studied in this thesis might be used as models for describing condensed matter physics in a superfluid phase near the quantum critical point, the physics of quark-gluon plasma (QGP), a deconfinement phase of QCD, which has been recently created at the Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC), and the QCD vacuum when a large magnetic field is present. Specifically, I use the gauge/gravity duality in the following three ways.

I first studied the holographic descriptions of sQGP. To this end, I used one gravity dual model of sQGP (the non-critical version of the Sakai-Sugimoto model) to investigate the hydrodynamics for the fundamental matter, flavor quark diffusion and internal structure of the holographic plasma. Furthermore, the electromagnetic signature spontaneously emitted from holographic plasma at finite baryon density was studied in different gravity dual models to reveal some universal properties of holographic method. Moreover, this signature can also be considered as one important probe of the strongly coupled quark-gluon plasma. Intriguingly, I found that, turning on the flavor magnetic field, the observed anisotropic feature of photon emission from QGP was also obtained in one simple holographic dual model.

Another direction of my research is about the holographic realization of superconductivity and superfluidity. I used the asymptotically Lifshitz black hole geometry to study the superconducting-like phase transition and probe the

effect of dynamical exponent z on the critical temperature and condensation. The transport properties in the symmetry breaking phase were also considered in this work. The main conclusion is that the dynamical exponent z non-trivially modify the critical temperature, the condensation and even the AC conductivity. Since previous works on holographic superconducting phase transition were focused on two or three dimensional space, I used the intersecting D-brane models to probe the p-wave superconducting-like phase transition in one dimensional space. The identification of the source and operator vacuum expectation value is nontrivial. We need one new prescription to define the physical quantities, which are directly related to the condensate and charge transport coefficients.

In the framework of gauge/gravity duality, the authors usually take the ansatz that the holographic geometry is translational invariant in the boundary spatial directions. One conclusion of this assumption is that the AC conductivity computed by using the holographic prescription shows a peak at zero frequency even with the $U(1)$ symmetry unbroken. It was claimed by several authors that this unnatural peak can be resolved by breaking the translational symmetry. Lately, this idea has gained great interest. On the other hand, it was discovered that a large magnetic field component from the non-Abelian gauge field can induce an instability of Einstein-Yang-Mills system in $(4 + 1)$ dimensional asymptotically AdS spacetime. Moreover, the expected new ground state should be inhomogeneous and break the translational symmetry as well as the $U(1)$ symmetry. Together with the collaborators, I investigated this system in detail and constructed one lattice ground state when a large magnetic field is present. The ground state forms a triangular Abrikosov lattice in the spatial directions perpendicular to the magnetic field, which shows some behaviors quite similar to the type-II superconductor. The lattice is composed of superconducting vortices induced by the condensation of a charged vector operator.

Keywords: AdS/CFT Correspondence, Gauge/Gravity Duality, Quark-Gluon Plasma, Electromagnetic Signature, Superconductor and Superfluid

目 录

摘要	i
Abstract	iii
目录	v
第一章 引言	1
1.1 $R^{1,d}$ 上的共形场论	1
1.1.1 共形场论简介	1
1.1.2 $\mathcal{N} = 4 SU(N)$ 超对称杨-米尔斯理论	4
1.2 Anti-de Sitter时空	6
1.3 超弦理论与D-brane动力学	8
1.3.1 超弦与超引力简介	8
1.3.2 D-brane动力学	11
1.4 AdS/CFT对应与规范/引力对偶	15
1.4.1 AdS/CFT对应的建立	15
1.4.2 规范/引力对偶	20
第二章 强耦合夸克胶子等离子体的引力对偶	27
2.1 夸克胶子等离子体与全息模型	27
2.1.1 夸克胶子等离子体性质概述	27
2.1.2 夸克胶子等离子体的全息模型简介	28
2.2 流体动力学与重夸克扩散	37
2.2.1 D4/ $\bar{D}4$ -brane的动力学	38
2.2.2 介子算符谱函数	40
2.2.3 轻夸克扩散系数	46

2.2.4	重夸克扩散常数	49
2.3	深度非弹性散射与结构函数	51
2.4	电磁信号：光子发射与电导率	58
2.4.1	热场论中的光子发射	59
2.4.2	运动方程及数值方法	60
2.4.3	数值结果及讨论	63
2.5	磁场诱导的各向异性	67
第三章	化学势诱导的全息超导体	75
3.1	超导相变及其全息实现	75
3.2	一维全息超导体	78
3.3	具有动力学临界指数的全息超导体	87
第四章	磁场诱导的全息超导相变	95
4.1	磁场诱导的不稳定性：渐近AdS时空	96
4.2	磁场诱导的超导体	104
4.2.1	规范场微扰展开	104
4.2.2	数值结果与讨论	111
第五章	结论与展望	117
	参考文献	119
	发表文章目录	133
	简历	135
	致谢	137

第一章 引言

作为全息原理[1, 2]的重要实现, AdS/CFT对应或者更广泛形式的规范/引力对偶假设($d + 1$)维平直时空中的规范场论和($d + 2$)维时空中的超弦理论为同一件事物的两种等价描述。

在其最初的表达形式中, $AdS_5 \times S^5$ 空间中的IIB型超弦理论和(3 + 1)维闵氏时空中 $\mathcal{N} = 4$ 超对称杨-米尔斯规范场(它是一个共形场论)之间存在一一对应关系[3]。其中, 非紧致化维度部分 AdS_5 的等距群 $SO(4, 2)$ 对应于规范场的共形对称性, 紧致化维度部分 S^5 的等距群 $SO(6)$ 对应于 $\mathcal{N} = 4$ 超对称中的R-对称性。在其更一般的形式中, 减少紧致化维度的对称性可相应地减少规范场的超对称数目; 而非紧致化维度并非 AdS_5 , 对应的规范场将不具有共形对称性[4]。AdS/CFT对应的各种推广形式亦用以研究量子色动力学的非微扰性质[5, 6]、夸克胶子等离子体的性质[7, 8]以及凝聚态物理学相关的一些问题如超导与超流[9, 10]、量子相变与临界行为[11]等。

本章将简略的介绍AdS/CFT对应的基本理论框架以及最新研究进展, 主要包括($d+1$)维闵氏时空中的共形场论、($d+2$)维(渐近)Anti-de Sitter(AdS)时空的基本概念、IIB型超弦及超引力简介、D-brane动力学的不同描述、AdS/CFT对应的基本思想及其推广、对偶的实现方案以及这一理论的最近发展趋势。

1.1 $R^{1,d}$ 上的共形场论

1.1.1 共形场论简介

在理解AdS/CFT对应之前, 需要了解共形场论的一般知识, 有关内容已有标准教材可以参考, 例如[12]。这一小节将对共形场论中与AdS/CFT对应相关的知识做一些简单的总结。共形变换是指保持角度不变的一种坐标变换, 用数学公式可以表示为

$$x_m \rightarrow x'^m \quad dx_m dx^m = \Omega^{-2}(x) dx'_m dx'^m. \quad (1.1)$$

共形对称性群的精确描述需要指定场论的背景时空。本论文中所讨论的对偶场论的背景时空仅限于平坦的闵氏时空, 这里将其简单的标记为 $R^{1,d}$ 。共形对称

性变换主要包括：时空平移变换 $x^m \rightarrow x^m + t^m$ ，Lorentz变换 $x^m \rightarrow \Lambda_n^m x^n$ ，伸缩变换 $x^m \rightarrow \lambda x^m$ 以及特殊共形变换

$$x^m \rightarrow \frac{x^m + a^m x^2}{1 + 2x^n a_n + a^2 x^2}. \quad (1.2)$$

这里，指标 m, n 的升降使用 $R^{1,d}$ 空间上的标准度规 $\eta_{mn} = \text{diag}(-1, 1 \cdots 1)$ 。如果将这些共形变换对应的生成元分别记为 P_m ， M_{mn} ， D 和 K_m ，那么这些生成元满足如下的对易关系¹：

$$\begin{aligned} [M_{mn}, P_r] &= -(\eta_{mr} P_n - \eta_{nr} P_m), & [M_{mn}, K_r] &= -(\eta_{mr} K_n - \eta_{nr} K_m), \\ [P_m, K_n] &= 2M_{mn} - 2\eta_{mn} D, & [D, P_m] &= -P_m, & [D, K_m] &= K_m, \\ [M_{mn}, M_{rs}] &= -\eta_{mr} M_{ns} - \eta_{rn} M_{sm} - \eta_{ns} M_{mr} - \eta_{sm} M_{rn}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

其余的所有对易子均为零。这些对易关系是可以通过给出各个生成特定的表达式来直接检验的，例如，这些生成元的微分算符形式如下：

$$\begin{aligned} P_m &= \partial_m, & M_{mn} &= x_m \partial_n - x_n \partial_m, \\ D &= x^m \partial_m, & K_m &= x^2 \partial_m - 2x_m x^n \partial_n. \end{aligned} \quad (1.4)$$

这些微分算符形式可以看作 $R^{1,d}$ 上的函数在这些无穷小共形变换下的具体变换方式，例如，在伸缩变换 $\lambda = 1 + \epsilon$ （ ϵ 为一无穷小量）下， $R^{1,d}$ 上的标量函数 $f(x)$ 变换规则为 $f(x) \rightarrow f(x) + \epsilon x^m \partial_m f(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ 。因此，很容易看出在这种表示下伸缩变换生成元的微分算符形式为 $x_m \partial_m$ 。一般情况下，场论中的算符在共形变换下的具有很复杂的变换行为。从共形代数(1.3)可以看出Lorentz变换的生成元 M_{mn} 与伸缩变换的生成元 D 是相互对易的，因此我们可以选取这样一组算符：它们构成Lorentz群的有限维表示，同时也是伸缩变换算符 D 的本征函数。具体说来，如果算符 $\mathcal{O}(x)$ 是生成元 D 的本征值为 $-\Delta$ 的本征函数，那么这意味着在标度变换 $x \rightarrow \lambda x$ 下，算符 $\mathcal{O}(x)$ 变换规则为 $\mathcal{O}(x) \rightarrow \lambda^{-\Delta} \mathcal{O}(\lambda x)$ ，或者写成对易子的形式为

$$[D, \mathcal{O}(x)] = (-\Delta + x^m \partial_m) \mathcal{O}(x), \quad (1.5)$$

这里， Δ 是算符 \mathcal{O} 的共形维数。

¹这些生成元的对易关系可以通过研究公式(1.1)的无穷小形式而得到。

$R^{1,d}$ 时空中的共形变换群最重要的一条性质就是它同构于群 $SO(2, d)$ ，这一性质可以从生成元的角度来理解。定义如下算符：

$$\begin{aligned} J_{mn} &= M_{mn}, & J_{m(d+1)} &= \frac{1}{2}(K_m - P_m), \\ J_{(d+2)(d+1)} &= D, & J_{m(d+2)} &= \frac{1}{2}(K_m + P_m). \end{aligned} \quad (1.6)$$

简单的代数运算可以得到新算符 J_{MN} 满足如下对易关系

$$[J_{MN}, J_{RS}] = -\eta_{MR}J_{NS} - \eta_{RN}J_{SM} - \eta_{NS}J_{MR} - \eta_{SM}J_{RN}, \quad (1.7)$$

其中， $\eta_{MN} = \text{diag}(-1, -1, 1, 1 \cdots 1)$ 。这些对易关系恰为 $so(2, d)$ 代数所满足的对易关系。在1.2节中，我们将会看到 $(d+2)$ 维AdS时空的等距群为 $SO(2, d)$ 。因此，这可以作为AdS/CFT对偶猜想的一个最简单的关于对称性的检验。

一般地，即使量子场论的经典拉氏量具有共形对称性，它也会被量子效应破坏，我们习惯性的称之为反常。 β 函数为零是一个量子场论具有共形对称性的必要条件。这里， β 函数是描述耦合常数 g 随能量标度 μ 的变化而跑动的物理量：

$$\beta(g) = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu}, \quad (1.8)$$

可见， $\beta(g) = 0$ 意味着该理论是标度不变的。量子场论中，算符 $\varphi(x)$ 的关联函数定义为编时算符的真空期望值，两点函数定义如下：

$$\langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle := \langle \mathcal{T}\varphi(x)\varphi(y) \rangle, \quad (1.9)$$

其中， \mathcal{T} 表示编时乘积，多点关联函数也有类似的表达式。在量子场论的路径积分形式下，关联函数可以表达为如下的泛函积分形式

$$\langle \mathcal{O} \rangle := \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{O} e^{-S[\varphi]}, \quad (1.10)$$

其中，场论的配分函数 \mathcal{Z} 定义为

$$\mathcal{Z} := \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]}, \quad (1.11)$$

$S[\varphi]$ 为场论的作用量。共形场论的一个重要任务是计算算符的关联函数，而共形对称性对这些关联函数的形式有很强的限制。忽略比例系数，共形对称性完

全决定了两点 and 三点关联函数的形式

$$\begin{aligned}\langle \varphi_1(x)\varphi_2(y) \rangle &= \frac{c\delta^{\Delta_1, \Delta_2}}{(x-y)^{2\Delta_1}}, \\ \langle \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z) \rangle &= \frac{k}{(x-y)^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}(y-z)^{-\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3}(x-z)^{\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3}},\end{aligned}$$

其中, Δ_i ($i = 1, 2, 3$) 是算符 $\varphi_i(x)$ 的标度维数, 常数 c, k 由具体的场论来确定。能动量张量算符是共形场论的一个重要算符, 可以证明共形不变性要求它是一个无迹的张量。

1.1.2 $\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ 超对称杨-米尔斯理论

作为 $(3+1)$ 维平直时空中共形场论的例子, 我们对 $\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ 超对称杨-米尔斯理论做简单的概述, 内容主要集中于该理论中与本论文直接相关的一些性质。

$\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ 超对称杨-米尔斯理论在超弦理论和形式化场论中引起了人们的广泛的关注。它是一个非阿贝尔的规范理论, 而且具有四维时空中最大的超对称², 一共有16个超荷, 它的 R 对称性为 $SU(4)_R$ 。这个理论包含如下的场: 一个规范场 A_μ , 指标 μ 代表 $(3+1)$ 维时空中的 Lorentz 指标; 四个 Weyl 费米子 λ^a , 指标 $a = 1, \dots, \mathcal{N}$; 六个实标量场 X^i , 指标 $i = 1, 2, \dots, 6$ 。在 $SU(4)_R$ 对称性下, A_μ 是一个单态, λ^a 为该对称性群的基础表示 $\mathbf{4}$, 实标量 X^i 是该 R -对称性群的二阶反对称张量表示 $\mathbf{6}$ 。所有的场均属于规范群 $SU(N)$ 的伴随表示, 例如实标量场 X^i 明显形式为 $(X^i)_n^m = X^{i(k)}(T^{(k)})_n^m$, 其中指标 $k = 1, 2, \dots, N_c^2 - 1$, $m, n = 1, 2, \dots, N$ 。所有的场可以整合在一起构成一个超对称多重态, 即 $\mathcal{N} = 4$ 的规范多重态。描述这些场相互作用的拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \text{Tr} \left\{ & -\frac{1}{2g_{YM}^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta_I}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu} - \sum_a i \bar{\lambda}^a \bar{\tau}^\mu D_\mu \lambda_a \right. \\ & - \sum i D_\mu X^i D^\mu X^i + g_{YM} \sum_{a,b,i} C_i^{ab} \lambda_a [X^i, \lambda_b] \\ & \left. + g_{YM} \sum_{a,b,i} \bar{C}_{iab} \bar{\lambda}^a [X^i, \bar{\lambda}^b] + \frac{g_{YM}^2}{2} \sum_{i,j} [X^i, X^j]^2 \right\},\end{aligned}\quad (1.12)$$

²这里只限于不包含引力的规范理论。在超引力框架下, 超对称的数目可以达到32个。

其中, g_{YM} 是规范耦合常数, θ_I 是瞬子角度, 规范场场强定义为 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig_{YM}[A_\mu, A_\nu]$, $\star F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$ 是规范场强 $F_{\mu\nu}$ 的Hodge对偶; 协变导数 D_μ 对于不同的场的具体形式为 $D_\mu X = \partial_\mu X + ig_{YM}[A_\mu, X]$ 和 $D_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda + ig_{YM}[A_\mu, \lambda]$; $\tau_\mu = (\mathbf{1}, -\sigma^i)$, $\mathbf{1}$ 为 2×2 的单位矩阵、 σ^i 是标准的Pauli矩阵; C_i^{ab} 是对称性群 $SU(4)_R$ 的李代数的结构常数。其中, 拉氏量中的求迹 Tr 表示对规范指标 k 求和。值得注意的是这个理论只有一个耦合常数 g_{YM} 。经典层次上, 各个场的质量量纲如下:

$$[A_\mu] = 1, \quad [\lambda] = \frac{3}{2}, \quad [X] = 1. \quad (1.13)$$

因此, 耦合常数是无量纲的, $[g_{YM}] = 0$ 。那么, $\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ 超对称杨-米尔斯理论经典层次上具有共形不变性。进一步的微扰计算证明, 该理论量子化之后的 β 函数在微扰论的所有阶都为零, 因此该理论在量子层次是一个共形理论。

在 $\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ 超对称杨-米尔斯理论中将超对称性与共形对称性结合在一起就形成了该理论的超共形对称群 $SU(2, 2|4)$ 。其中, $SU(2, 2)$ 部分表示Weyl旋量的对称性, $SU(4)$ 则表示 $\mathcal{N} = 4$ 超对称的 R 对称性群。下面对这些对称性的生成元做一些简单的总结:

- (1) 共形对称性生成元 $\{P_m, M_{mn}, D, K_m\}$, 它们满足对易关系式(1.3)。
- (2) R 对称性 $SU(4)_R \cong SO(6)_R$ 。
- (3) Poincaré超对称生成元 $Q_\alpha^a, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^a$, $a = 1, 2, 3, 4$, 满足如下的反对易关系³:

$$\{Q_\alpha^a, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^b\} = -2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu \delta_b^a, \quad \{Q_\alpha^a, Q_\beta^b\} = 2\epsilon_{\alpha\beta} Z^{ab}$$

其中, Z^{ab} 为中心荷。(3)共形超对称生成元 $S_{\alpha a}$ 和 $\bar{S}^{\dot{\alpha} a}$, 满足如下的反对易关系

$$\begin{aligned} \{S_{\alpha a}, S_{\beta b}\} &= \{Q_\alpha^a, \bar{S}_{\dot{\beta}}^b\} = 0, \\ \{S_\alpha^a, \bar{S}_{\dot{\beta}}^b\} &= 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} K_\mu \delta_b^a, \\ \{Q_\alpha^a, S_{\beta b}\} &= \epsilon_{\alpha\beta} \delta_b^a D + \frac{1}{2} \delta_b^a M_{\mu\nu} (\sigma^{\mu\nu} \epsilon)_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

由超对称多重态中的场 $\{A_\mu, \lambda^a, \bar{\lambda}^a, X^i\}$ 可组成该理论的复合算符。当这些相乘的场处于同一时空点时, 需要一个正规化方案来定义这个乘积算符。超共形原处算符 \mathcal{O} 定义为满足条件 $[S, \mathcal{O}] = 0$ 的算符。也就是说, 超共形原初算符是超共性群 $SU(2, 2|4)$ 的一个表示中的标度维数最低的算符。由这些场组成的一个最重要的算符就是所谓的单迹算符, 相关讨论在文献中有详细叙述。

³关于超对称理论的一般介绍, 可以参考经典文献[13, 14]。

1.2 Anti-de Sitter时空

AdS/CFT对应的引力涉及到 $AdS_5 \times S^5$ 时空中的IIB超弦理论，本节对AdS时空的一些几何性质做简略的总结。 $(d+2)$ 维AdS空间 AdS_{d+2} 是具有常数负曲率的最大对称的Lorentz流形。它是 $(d+2)$ 维双曲空间的Lorentz类似，是具有负宇宙学常数的Einstein场方程的最大对称的真空解。

AdS_{d+2} 可以用平坦的 $d+3$ 维空间中的双曲面来描述，该 $(d+3)$ 维空间的度规为

$$ds^2 = -dX_0^2 - dX_{d+2}^2 + \sum_{i=1}^{d+1} dX_i^2. \quad (1.14)$$

双曲面满足方程

$$X_0^2 + X_{d+2}^2 - \sum_{i=1}^{d+1} X_i^2 = L^2, \quad (1.15)$$

其中， L 是 AdS_{d+2} 空间的半径。不难看出该空间具有等几何群 $SO(2, d+1)$ ，而且它是一个齐性的各向同性的空间。

方程(1.15)可以通过将其中的坐标做如下参数化得到

$$\begin{aligned} X_0 &= \cosh \rho \cos \tau, & X_{d+2} &= \cosh \rho \sin \tau, \\ X_i &= L \Omega_i \sinh \rho \quad (i = 1, \dots, d+1; \sum_i \Omega_i^2 = 1). \end{aligned} \quad (1.16)$$

将上述参数化代入度规(1.14)可以得到 AdS_{d+2} 空间的度规：

$$ds^2 = L^2 (-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega^2). \quad (1.17)$$

如果 $\{0 \leq \rho, 0 \leq \tau < 2\pi\}$ ，那么双曲面的解(1.16)覆盖整个双曲面一次， (τ, ρ, Ω_i) 也称为AdS空间的整体坐标。由于在 $\rho = 0$ 附近，度规(1.17)具有如下行为

$$ds^2 \approx L^2 (-d\tau^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2), \quad (1.18)$$

因此该双曲面具有 $S^1 \times R^{d+1}$ 的拓扑结构。这里， S^1 表示在 τ 方向上封闭的类时曲线。为了得到一个具有因果性的时空，可以将圆周 S^1 解开从而使(1.16)成为双曲面的普适覆盖，也就是说将 τ 的取值范围扩展到 $-\infty < \tau < +\infty$ 。在本文以后的论述中，当提到AdS空间时，我们只考虑这种普适覆盖的情形。

AdS 空间有如下重要性质：共形紧致化的 AdS_{d+2} 的边界与 $(d+1)$ 维闵氏空间共形紧致化是完全一致的。这一点在AdS/CFT对应中起着至关重要的作用。为了更清晰的看出这一性质，通过如下方式引入新坐标 θ ，

$$\tan \theta = \sinh \rho, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (1.19)$$

这样，度规(1.17)具有如下形式：

$$ds^2 = \frac{L^2}{\cos^2 \theta} (-d^2\tau + d^2\theta + \sin^2 \theta d\Omega^2). \quad (1.20)$$

对上述度规做如下共形变换：将公式(1.20)两边同时乘以 $L^{-2} \cos^2 \theta$ 可得

$$ds'^2 = -d^2\tau + d^2\theta + \sin^2 \theta d\Omega^2 \quad (1.21)$$

由于共形变换不改变时空几何的因果性，因此度规(1.20)与(1.21)具有相同的因果性。粗略的讲，公式(1.21)描述的是Einstein 静态宇宙 $R \times S^d$ 。然而，由公式(1.21)所描述的时空几何缺少了 $\theta = \pi/2$ 这一点，严格说来它只能表达 $R \times S^d$ 的一半的空间。如果将对应于空间无穷远处的点 $\theta = \pi/2$ 加入由(1.21)表达的时空几何中，得到如下的紧致化的时空几何

$$ds^2 = -d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega^2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < \tau < +\infty. \quad (1.22)$$

如果进一步指定 $R \times S^d$ 在 $\theta = \pi/2$ 处的边界条件，柯西问题就是完备的。从(1.22)不难看出，共形紧致化的 AdS_{d+2} 的边界($\theta = 2/\pi$)与 $(d+1)$ 维共形紧致的闵氏时空是完全一样的。

AdS 空间还可以用另外一套坐标系 (u, t, \vec{x}) ($0 < u, \vec{x} \in R^d$)来标识，

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{2u} (1 + u^2 (L^2 + \vec{x}^2 - t^2)), \\ X_i &= L u x_i \quad (i = 1, \dots, d), \\ X_{d+1} &= \frac{1}{2u} (1 - u^2 (L^2 + \vec{x}^2 - t^2)), \\ X_{d+2} &= L u t. \end{aligned} \quad (1.23)$$

在这个新坐标系下， AdS_{d+2} 具有如下形式的度规：

$$ds^2 = L^2 \left(\frac{du^2}{u^2} + u^2 \eta_{ij} dx^i dx^j \right). \quad (1.24)$$

新坐标 (u, t, x_i) 又称为Poincaré坐标卡，文献中经常使用这种坐标系。 AdS 度规的另外一个常用的形式由坐标变换 $u \rightarrow \frac{1}{u}$ 得到

$$ds^2 = L^2 \left(\frac{du^2}{u^2} + \frac{1}{u^2} \eta_{ij} dx^i dx^j \right). \quad (1.25)$$

在 AdS 时空中，有质量的粒子永远到达不了它的边界；然而，光线却可以在有限的时间内往返于 AdS 的边界，这是因为 AdS 时空的Penrose图是一个圆柱体。准确地讲，如果对于在 AdS 空间中传播的光子场在边界加上合适的边界条件，光线是可以反射的。关于 AdS 空间的更多的知识可以参考文献[15]。

除了 AdS 空间外，渐近的 AdS 空间也是研究的很多的几何背景。实际上，Einstein-Hilbert作用量

$$S = \frac{1}{2\kappa_{d+2}^2} \int d^{d+2}x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad \Lambda = -\frac{d(d+1)}{2L^2} \quad (1.26)$$

也是AdS-Schwarzschild黑洞几何的解

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} (-f(r)dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{L^2}{r^2} \frac{dr^2}{f(r)}, \quad f(r) = 1 - \left(\frac{r_h}{r}\right)^{d+1}. \quad (1.27)$$

其中， $r = r_h$ 为黑洞视界，它与霍金温度 T 直接相关。如果将度规(1.27)做欧几里得延拓，为了消除在黑洞视界处的光锥奇异可以得到 T 的表达式

$$T = \frac{(d+1)r_h}{4\pi L^2}.$$

AdS-Schwarzschild度规只是渐近 AdS 时空的一个例子，它对偶于有限温度下的共形场论的平衡态，而且霍金温度即为对偶场论的温度。

1.3 超弦理论与D-brane动力学

1.3.1 超弦与超引力简介

AdS/CFT对应是一个关于超共形规范理论与超弦理论的对偶，这一小节简要介绍IIB超弦理论及其低能近似—IIB超引力。

IIB超弦是一种的定向的闭弦理论，它的能谱中包含有限数量的无质量态：引力子、伸缩子、2形式场以及这些态的超对称伴子。此外，它的能谱中也包含着无限多的有质量的弦激发态。术语“II”表示该理论有两个引力微子(引力子

的超伴子)；当考虑到弦能谱中的手征性时，“B”可以用来区别IIA超弦与IIB超弦这两种理论。

超对称的引入使得玻色弦理论中闭弦能谱中的快子模式自然的消除，而且超对称的存在丰富了玻色弦原有的场内容，它引入了描述自然界基本粒子相互作用不可或缺的时空费米子。粗略的讲，闭弦的能谱是由两个开弦的能谱做乘积得到，有必要对定向的开弦做一简略的陈述。超弦的world-sheet上的作用量为

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma (\partial^\alpha X^\mu \partial_\alpha X_\mu + \bar{\Psi}^\mu \gamma^\alpha \partial_\alpha \Psi_\mu), \quad (1.28)$$

$\tau \in (-\infty, \infty)$ 和 $\sigma \in [0, \pi]$ 分别标记超弦world-sheet上的时间与空间坐标，指标 μ 标记10维闵氏空间的坐标。 $X^\mu(\tau, \sigma)$ 是标记超弦位置的world-sheet上的玻色场， $\Psi^\mu(\tau, \sigma)$ 是它的费米型伴子场。在二维world-sheet上， $\Psi^\mu(\tau, \sigma)$ 可以写成两分量的Majorana-Weyl旋量

$$\Psi^\mu(\tau, \sigma) = \begin{pmatrix} \Psi_-^\mu \\ \Psi_+^\mu \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = i\gamma\Psi^T. \quad (1.29)$$

X^μ 和 Ψ_μ 均可以看作10维闵氏时空中的矢量， γ^α 表示二维Dirac矩阵，可取如下的一个表达形式

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

定义world-sheet上的光锥坐标 $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$ ，world-sheet上的费米子场 $\Psi^\mu(\sigma^+, \sigma^-)$ 满足如下的Dirac方程⁴：

$$\partial_+ \Psi_-^\mu = 0, \quad \partial_- \Psi_+^\mu = 0, \quad (1.31)$$

方程(1.31)的解分别描述向左运动与向右运动的波。对于超弦作用量(1.28)中的费米型部分做变分并运用运动方程(1.31)可以得到如下的表面项

$$\delta S_f = \frac{i}{4\pi\alpha'} \int d\tau (\Psi_-^\mu \delta \Psi_{-\mu} - \Psi_+^\mu \delta \Psi_{+\mu}) \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}. \quad (1.32)$$

对于开弦而言，为了保持变分原理的完整性需要在开弦的边界上满足：

$$(\Psi_-^\mu \delta \Psi_{-\mu} - \Psi_+^\mu \delta \Psi_{+\mu}) \Big|_{\sigma=0, \pi} = 0 \Leftrightarrow \delta(\Psi_{+\mu})^2 \Big|_{\sigma=0, \pi} = \delta(\Psi_{-\mu})^2 \Big|_{\sigma=0, \pi} = 0. \quad (1.33)$$

⁴对于world-sheet上的玻色子场 $X^\mu(\sigma^+, \sigma^-)$ 可以做类似的分析，详细的讨论可参见经典文献[16]。

不失一般性，在开弦的一端可选取边界条件 $\Psi_+^\mu(\tau, 0) = \Psi_-^\mu(\tau, 0) = 0$ ；在开弦的另一端就有如下两种可能的选择

$$\begin{aligned} \text{R: } \quad \Psi_+^\mu(\tau, \pi) &= +\Psi_-^\mu(\tau, \pi), \\ \text{NS: } \quad \Psi_+^\mu(\tau, \pi) &= -\Psi_-^\mu(\tau, \pi). \end{aligned} \quad (1.34)$$

它们分别对应于开弦worldsheet上费米子的Ramond(R)部分和Neveu-Schwarz(NS)部分，相应的傅里叶模式展开为

$$\begin{aligned} \text{R: } \quad \Psi_\pm^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in\sigma^\pm}, \\ \text{NS: } \quad \Psi_\pm^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z} + 1/2} b_n^\mu e^{-in\sigma^\pm}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

在量子化之后，上式中的Grassmann数 d_n^μ, b_n^μ 成为产生或湮灭算符，可用于构建弦的各种激发态。

NS部分的基态是10维时空中的标量，具有负的质量平方，因而它是一个快子，运用GSO投射可以将其消除。同时，GSO投射也确保了在各个质量层次上的费米子与玻色子自由度的一致，这是10维时空超对称的必要条件。经过GSO投射之后，R部分和NS部分的基态为：

- R: 无质量的矢量粒子，属于 $SO(8)$ 群的八维矢量表示 $\mathbf{8}_V$ ；
- NS: 无质量的费米子，自旋为1/2，属于 $SO(8)$ 群的 $\mathbf{8}_S$ 表示，其手征性可以随意选取。

有了开弦的能谱，闭弦的能谱很容易的通过两个开弦的能谱组合得到，它有四个可能的部分：分别用R-R, R-NS, NS-R, NS-NS来标记。将上述开弦的无质量能谱按照他们在 $SO(8)$ 群的表示下做如下直积分解，

$$\begin{aligned} \text{NS-NS: } \quad \mathbf{8}_V \otimes \mathbf{8}_V &= \mathbf{1} \oplus \mathbf{28} \oplus \mathbf{35} = \Phi \oplus \mathbf{B}_{\mu\nu} \oplus \mathbf{G}_{\mu\nu}, \\ \text{NS-R: } \quad \mathbf{8}_V \otimes \mathbf{8}_S &= \mathbf{8}_C \oplus \mathbf{56}_S, \\ \text{R-NS: } \quad \mathbf{8}_S \otimes \mathbf{8}_V &= \mathbf{8}_C \oplus \mathbf{56}_S, \\ \text{NS-NS: } \quad \mathbf{8}_S \otimes \mathbf{8}_S &= \mathbf{1} \oplus \mathbf{28} \oplus \mathbf{35}_+ = [\mathbf{0}] \oplus [\mathbf{2}] \oplus [\mathbf{4}]_+ = \mathbf{C}_0 \oplus \mathbf{C}_2 \oplus \mathbf{C}_4. \end{aligned}$$

相应地，IIB超弦的无质量粒子谱如下：

- NS-NS: 一个标量 Φ , 称为伸缩子, 有一个自由度; 一个2形式场 B_2 , 有28个自由度; 一个对称无迹的二阶张量 $G_{\mu\nu}$, 有35个自由度。
- NS-R和R-NS: 一个自旋为1/2的费米子, 叫做dilatino, 有八个自由度; 一个自旋为3/2的费米子, 称为引力微子, 有56个自由度。
- R-R: 一个零形式的规范势 C_0 , 有一个自由度; 一个2形式的规范势 C_2 , 有28个自由度; 一个4形式的规范势 C_4 , 有35个自由度。

可见, IIB超弦的零质量粒子谱构成了一个 $\mathcal{N} = 2$ 的超引力多重态。

然而, 仍然没有一个自洽的理论来描述IIB超弦理论在所有质量层次上的行为。在低能极限下, 只有零质量的自由度是需要考虑的, 它们可以用IIB超引力来描述。在弦框架下, 描述这些场的相互作用的拉氏量可以写成如下的协变形式

$$S_{\text{IIB}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-\det G} \left\{ e^{-2\Phi} \left(\mathcal{R} + 4\partial^\mu \Phi \partial_\mu \Phi - \frac{1}{2} |H_3|^2 \right) - \frac{1}{2} \left(|F_1|^2 + |\tilde{F}_3|^2 + |\tilde{F}_5|^2 \right) \right\} - \frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int C_4 \wedge H_3 \wedge F_3, \quad (1.36)$$

由于 \tilde{F}_5 是一个自对偶的场, 需要额外的加入一个限制 $\star \tilde{F}_5 = \tilde{F}_5$ 。其中, 耦合常数 κ_{10} , 牛顿引力常量 $G_N^{(10)}$ 以及弦耦合常数 g_s 之间有下列关系:

$$2\kappa_{10}^2 g_s^2 = 16\pi G_N^{(10)} = (2\pi)^{10} \alpha'^2 g_s^2. \quad (1.37)$$

作用量(1.36)中的 \mathcal{R} 为Ricci标曲率, 各个微分形式场的定义如下:

$$\begin{aligned} H_3 &= dB_2, & F_1 &= dC_0, & F_3 &= dC_2, & F_5 &= dC_4, \\ \tilde{F}_3 &= F_3 - C_0 \wedge H_3, & \tilde{F}_5 &= F_5 - \frac{1}{2} C_2 \wedge H_3 + \frac{1}{2} B_2 \wedge F_3. \end{aligned} \quad (1.38)$$

1.3.2 D-brane动力学

AdS/CFT对应源于对超弦理论中D-brane的研究, 而D-brane的低能动力学有两种相互对偶的描述方式:

- D-brane作为超弦理论中具有动力学的客观实体;
- D-brane作为10维时空中IIA/IIB超引力的孤子解。

本节将对D-brane低能动力学的上述两种描述方式做一些简略的总结，从而为得出AdS/CFT对偶猜想做铺垫。

在弦理论中D p -brane是一种非微扰的实体，并且在 p 维空间上延展开来，可以看做 p 维的超平面，而且开弦终止于D-brane之上。D-brane的存在使得超弦真空的对称性会受到相应的破坏。例如，D p -brane的存在使闵氏时空中IIB超弦的Lorentz对称性从 $SO(1, 9)$ 破坏到 $SO(1, p) \times SO(9 - p)$ 。同时，这些开弦的无质量的激发态给出一个具有不多于16个超荷的矢量超对称多重态；因此，D-brane是超弦理论中的BPS态。

D p -brane的world-volume Σ 是 $(p + 1)$ 维的，因而D p -brane与超弦中的RR形式场 C_{p+1} 很自然的通过下面的作用量耦合在一起

$$\mu_p \int_{\Sigma_{p+1}} \mathcal{P}[C_{p+1}],$$

这里， \mathcal{P} 表示将形式场 C_{p+1} 拉回映射到流形 Σ 上。D p -brane的RR p -形式的荷 μ_p 与brane的张力 τ_p 通过下式联系起来

$$T_p = g_s \tau_p = (2\pi)^{-p} \alpha'^{-\frac{p+1}{2}} = \mu_p. \quad (1.39)$$

开弦的无质量激发态给出如下粒子谱：标量场、规范场以及它们的费米型超对称伴子。在D维时空中，D p -brane的存在使得开弦的量子化给出(D- p -1)个零质量的标量场，描述D p -brane的横向位置。单一的一个D-brane的world-volume上有一个 $U(1)$ 的多重态，其中的零质量矢量场来自于一根开始并终止于D-brane上同一位置的零长度开弦。当有 N 个D-brane时，开弦可以在这些branes之间延展开，这时可以用这根开弦的终点来标记它们；比如， $[ij]$ 表示一根起始于brane i 终止于brane j 的开弦， $i, j \in \{1, \dots, N\}$ 。这些用于标记D-brane的离散指标 i, j 也叫做Chan-Paton指标，显然，开弦的每一个端点都带有规范群的一个Chan-Paton指标。然而，这个指标对应于该规范群的基础表示；因此， $U(1)$ 的矢量多重态是由基础表示和反基础表示的指标来标记，也可以看做一个伴随表示的场。

如果这 N 个D-brane之间的任何两个brane都不重叠，那么每一个brane上有一个无质量的矢量激发，总共就有 $U(1)^N$ 个规范群。相反，如果这 N 个D-brane相互重叠在一起，在这些D-branes的world-volume上就有 $N \times N$ 个无质量的矢量态，它们对应于零长度开弦的 $N \times N$ 个可能的标记方式。而且，

这 $N \times N$ 个无质量的矢量态可以用于形成 $U(N)$ 规范群的伴随表示。进一步的研究表明 N 个重叠在一起的 D_p -brane 的低能有效作用量描述的正是 $U(N)$ 的超对称规范场论。通常，中心群 $U(1) = U(N)/SU(N)$ 对应于这些 D-brane 的位置，如果只关心这些 D-brane 上的动力学，这个中心群是可以忽略的，这样就只留下了 $SU(N)$ 的规范对称性。

接下来将简单的讨论单个 D-brane 的低能有效作用量。D-brane 可以作为闭弦的源，同时它也能够背景几何时空中与闭弦场相互作用。而且，D-brane 的涨落可以用它 world-volume 上的场论来描述，而这个场论中的规范场就来源于终止于其上的开弦。简单说来，这个低能作用量定义为将所有的有质量态和在圈图效应中出现的无质量模式积掉 (Integrating out)。它包括两部分的贡献：Dirac-Born-Infeld (DBI) 项和 Wess-Zumino (WZ) 项。其中，玻色型 DBI 项部分的贡献为

$$S_{\text{DBI}} = -T_p \int d^{p+1} \xi e^{-\Phi} \sqrt{-\det(\mathcal{P}[G+B]_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})}, \quad (1.40)$$

这里， G 是背景时空的度规， B 是 NS-NS 2-形式场， Φ 是伸缩子， $F = dA$ 是 D-brane 上的 $U(1)$ 规范场的场强。行列式 \det 是对 D-brane 的 world-volume 坐标 $\{a, b\}$ 求和，拉回映射 \mathcal{P} 的具体表达形式如下

$$\mathcal{P}[T]_{a_1 \dots a_n} = \frac{\partial X^{A_1}}{\partial \xi^{a_1}} \cdots \frac{\partial X^{A_n}}{\partial \xi^{a_n}} T_{A_1 \dots A_n},$$

固定 D-brane 在目标时空中具体位置的标量场 ϕ^i 被归纳到嵌入函数 $X^A(\xi)$ 中。

D-brane 低能作用量的玻色型部分的第二个贡献来自 WZ 项，其形式如下

$$S_{\text{WZ}} = \mu_p \sum_q \int_{\Sigma_{p+1}} \mathcal{P}[C_q e^B] e^{2\pi\alpha' F}, \quad (1.41)$$

公式 (1.41) 中的指数函数在展开时需要写成外积的形式，

$$e^{\mathcal{P}[B] + 2\pi\alpha' F} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{(\mathcal{P}[B] + 2\pi\alpha' F) \wedge \cdots \wedge (\mathcal{P}[B] + 2\pi\alpha' F)}_{n \text{ 次}}$$

公式 (1.40) 和 (1.41) 只适用于 D-brane 上阿贝尔规范理论的情形。当有多个 D-brane 重叠在一起时，其 world-volume 上的规范理论是非阿贝尔的，这时需要将作用量 (1.40) 和 (1.41) 推广到非阿贝尔的情形；同时，D-brane 上的存在费米型场，它们也有自己的作用量。关于 D-brane 低能有效作用量的非阿贝尔推广和费米型部分可分别参考文献 [17–20]。

D-brane的另外一种描述方式是10维时空中IIA/IIB超引力的孤子解。D-brane是一种很重的带电的客观实体，它能够与引力和弯曲时空相互耦合起来。在这个方面的开创性工作是在平坦时空中构建black p -brane的解[21]。以IIB超引力为例，如果只限制于考虑不带有电荷的black D p -brane的构建，则该超引力的作用量有如下简化的形式

$$S_{\text{IIB}}^{(p)} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-\det G} \left\{ e^{-2\Phi} (\mathcal{R} + 4\partial^\mu \Phi \partial_\mu \Phi) - \frac{1}{2} |F_{p+2}|^2 \right\}. \quad (1.42)$$

对于IIA超引力，公式(1.42)可以做相应的推广。保持对称性 $SO(1, p) \times SO(9 - p)$ 的BPS D p -brane的解为

$$\begin{aligned} ds^2 &= H_p(r)^{-1/2} \eta^{ab} dx_a dx_b + H_p(r)^{1/2} \delta^{ij} dy_i dy_j, \\ e^\Phi &= g_s H_p(r)^{(3-p)/4}, \\ C_{p+1} &= \left(\frac{1}{H_p(r)} - 1 \right) dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_p, \end{aligned} \quad (1.43)$$

这里， $a, b \in \{0, \dots, p\}$ 表示D p -brane的world-volume上的坐标； $i, j \in \{p + 1, \dots, 9\}$ 代表与D p -brane超平面垂直的横向的坐标。调和函数 $H_p(r)$ 为

$$H_p(r) = 1 + \left(\frac{R_p}{r} \right)^{7-p}, \quad r^2 = \sum_{i=p+1}^9 y_i^2, \quad (1.44)$$

R_p 由下面的公式给出

$$R_p^{7-p} = (4\pi)^{\frac{5-p}{2}} \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right) g_s N (\alpha')^{\frac{7-p}{2}}, \quad (1.45)$$

N 表示RR荷的数目，也就是重叠在一起的D p -brane的数目。由于荷守恒， N 也可以由 C_{p+1} 的场强的Hodge对偶在 S^{8-p} 球面上的积分得到

$$\int_{S^{8-p}} \star F_{p+2} = N.$$

从公式(1.43)可知 N 个重叠的D3-brane可作为如下IIB超引力的源：

$$\begin{aligned} ds^2 &= H_3(r)^{-1/2} \eta^{ab} dx_a dx_b + H_3^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \\ F_5 &= (1 + \star) dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dH_3(r)^{-1}, \\ H_3(r) &= 1 + \left(\frac{R}{r} \right)^4, \quad R^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2, \quad a, b \in \{0, \dots, 3\}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

在near-horizon极限下 $r \ll 1^5$ ，度规(1.46)趋向于如下 $AdS_5 \times S^5$ 的形式

$$ds^2 = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \eta^{ab} dx_a dx_b + \left(\frac{R}{r}\right)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad a, b \in \{0, \dots, 3\}. \quad (1.47)$$

总结这一节的内容可以得到下面两条关于D3-brane的重要结论：

- 对于 N 个相互重叠的D3-brane而言，它的四维world-volume上的场论是 $\mathcal{N} = 4$ $U(N)$ 超对称杨-米尔斯规范理论⁶，它的低能有效作用量由DBI和WZ这两项组成。
- N 个相互重叠的D3-brane可以描述由IIB超弦理论的低能极限—IIB超引力—的一个解，它有如下的内容组成： $AdS_5 \times S^5$ 的几何(在near-horizon极限下)、一个常数的伸缩子、一个自对偶的RR 5形式场强。

AdS/CFT对应的最初形式正是基于上述D3-brane的两种不同描述而得到的。

1.4 AdS/CFT对应与规范/引力对偶

1.4.1 AdS/CFT对应的建立

这一小节将简略地陈述Maldacena在建立AdS/CFT对应时的主要论证，有关内容可参见经典文献[3, 15]。考虑10维平直时空中的IIB超弦理论，引入 N 个重叠的D3-brane并使其在该10维时空中的 $(3+1)$ 维超平面上延展开来。从微扰论的角度，该理论系统包含闭弦和开弦两种激发态：闭弦是empty space的激发；开弦终止于D-branes，相应地描述D-branes的激发。上述系统在能量低于弦尺度 $1/g_s$ 的低能区，只能激发无质量的弦态。根据Wilson重整化群流动的观点，对于这些低能激发可以用一个有效的作用量来描述它们之间的相互作用。闭弦的无质量激发态对应10维时空中的引力超多重态，它们相互作用正好对应于IIB超引力；开弦的无质量激发态给出 $\mathcal{N} = 4$ 的矢量超多重态，它们的低能有效相互作用可以用 $\mathcal{N} = 4$ $U(N)$ 超对称杨-米尔斯理论来描写；闭弦与开弦的低能激发之间也存在相互耦合。

⁵在(1.4)一节中，我们将详细解释这种极限的物理内涵。

⁶D-brane在10维时空中破坏超对称的个数与它在该时空中的位型直接相关，可以用 ND 数来标记，详细的讨论可见[22]中13.4一节的论述。

因此，上述系统在低能情形下的所有无质量激发模式的完整的有效作用量可以示意性地表达成如下形式

$$S = S_{\text{bulk}} + S_{\text{brane}} + S_{\text{int}}. \quad (1.48)$$

上述有效作用量是不可重整的，它只是该系统在低能下的一种有效描述，可以按照Wilson的重整化群流动的观念来理解。也就是说，可以从一个假想的高能下的完整理论出发，将所有很重的激发模式(这里为有质量的态)积掉，但是保留所有无质量的激发模式。公式(1.48)中各项的物理意义如下：

- S_{bulk} : 10维超引力的作用量和一些高阶修正项；
- S_{brane} : 这一项定义在D3-brane的(3+1)维world-volume上，包括 $\mathcal{N} = 4$ 超对称杨-米尔斯理论的拉氏量和一些如诸如 $\alpha'^2 \text{Tr}\{F^4\}$ 的高阶修正项；
- S_{int} : D3-brane上的无质量激发与bulk中无质量态间的相互作用项。

对于 S_{bulk} 这一项，可以将它按照牛顿引力常数 κ^2 做级数展开。对于引力子部分有如下示意性的表达式

$$S_{\text{bulk}} \sim \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{10}x \sqrt{-\det g} \mathcal{R}_g \sim \int d^{10}x ((\partial h)^2 + \kappa(\partial h)^2 h + \dots) \quad (1.49)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}. \quad (1.50)$$

类似地，相互作用项 S_{int} 正比于耦合常数 κ 的正幂次。

为了更清晰的看出该系统在低能极限下的行为，在取极限 $l_s \rightarrow 0$ ⁷时固定能量，同时保持其它所有的无量纲参数固定(包括弦耦合常数 g_s 和 N)。在这个极限下，耦合常数 $\kappa \sim g_s \alpha'^2 \rightarrow 0$ ，因此，在低能极限下作用量中所有正比于 κ 的项均可以忽略。换言之，该系统在上述低能极限下退耦为下面两个无相互作用的系统：

- 10维平直时空中的自由引力理论，对应于 S_{bulk} 的低能极限；
- 4维闵氏时空中的 $\mathcal{N} = 4$ $U(N)$ 超对称杨-米尔斯理论，对应于 S_{brane} 的低能极限。

⁷这个极限也称为Maldacena极限。

该系统在低能极限下的行为也可以从另外一个角度来理解。由于D-brane是有质量的带电实体，它可以作为IIA/IIB超引力中各种场的源，这正是上一节所阐述的IIA/IIB超引力中的black D p -brane解。对于D3-brane，它对应的超引力解如公式(1.46)中所示。注意到该度规的时间-时间分量是依赖于坐标 r 的，因此能量的定义是定域的：一个观测者在位置 r 处测得一个物体的能量 E_r 和该观测者在无穷远处 $r \rightarrow \infty$ 测得该物体的能量 E_∞ 有如下关系：

$$E_\infty = H_3^{-1/4}(r)E_r,$$

这正是广义相对论中的频率红移关系。从位于无穷远处 $r \rightarrow \infty$ 观测者的角度来讲，低能极限下有两种可能的激发：在bulk区域，可有无质量的引力超多重态；在 $r = 0$ 附近的区域(near-horizon区域)，可有有质量的弦激发态，但是由于红移关系它们相对于无穷远处的观测者来讲是低能的激发。进一步考虑 $l_s \rightarrow 0$ 的低能极限：bulk中的无质量的引力超多重态趋于自由引力理论；而且，near-horizon附近的激发模式和bulk中的激发模式相互退耦，没有相互作用。因此，在低能极限下该系统退耦为一个自由引力体系和如下的 $AdS_5 \times S^5$ 几何

$$ds^2 = \left(\frac{r}{R}\right)^2 (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left(\frac{R}{r}\right)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2).$$

综合以上论述：在低能极限 $l_s \rightarrow 0$ 下，对于IIB型超弦中的D3-brane系统从两种不同角度的分析均得到了两个相互退耦的理论，而且从这两个不同角度下的分析下均得到了一个自由的引力理论。1997年底，Maldacena基于以上的分析得到如下对偶猜想⁸：

(3 + 1)维闵氏时空中的 $\mathcal{N} = 4 U(N)$ 的超对称杨-米尔斯理论与
 $AdS_5 \times S^5$ 空间中的IIB型超弦理论是等价的。

Maldacena在做出上述对偶猜想的同时也注意到了在整个论证过程中的各种近似的合理性，(1)根据场论中圈图效应的分析，微扰论成立的条件为

$$g_{YM}^2 N \sim g_s N \sim \frac{R^4}{l_s^4} \ll 1; \quad (1.51)$$

⁸对应于不同的参数范围，AdS/CFT对偶猜想可以表达为较强或较弱的形式，有关论述可以参考讲义[23]。

(2)可用经典引力描述的区域满足 AdS 空间的半径与 S^5 的半径远大于弦的长度

$$\frac{R^4}{l_s^4} \sim g_s N \sim g_{YM}^2 N \gg 1. \quad (1.52)$$

可见，场论的微扰区与引力的适用区是不相容的，这与上述对偶猜想两边完全不同的理论体系这一事实是一致的。如果对偶猜想的一边处于强耦合区，那么对偶的另一边却处于弱耦合区，反之亦然。因此， AdS/CFT 对应是一个强弱对偶理论，这使得人们很难直接的证明该猜想；但是，正是这种强弱对偶的存在允许我们将强耦合的场论问题转化为可以做微扰分析的超引力理论。需要指出的是，在公式(1.51)和(1.52)中，假设了 $l_s < 1$ 。于是，为了在超引力这边可以做微扰计算， N 需要足够大。

AdS/CFT 对偶的精确数学描述是在[4, 24]中提出的，它主要包括如下两方面的内容：(1)场论中的规范群指标 N 、规范耦合常数 g_{YM} 与弦理论中的弦耦合常数 g_s 、弦的长度、 AdS_5 以及 S^5 的半径 R 之间的关系

$$g_{YM}^2 = 2\pi g_s, \quad g_{YM}^2 N = \frac{R^4}{\alpha'^2}; \quad (1.53)$$

(2)场论的生成泛函和与之对偶的超弦理论的配分函数的关系

$$e^{-W[\phi_0(x)]} \equiv \left\langle \exp \left(\int d^4x \phi_0(x) \mathcal{O}(x) \right) \right\rangle_{\text{CFT}} = \mathcal{Z} [\phi(x, r)|_{r=\infty} = \phi_0(x)]. \quad (1.54)$$

公式(1.54)的右边是关于 $AdS_5 \times S^5$ 时空中超弦理论的配分函数，而且在计算时需要将弦论中的场 $\phi(x, r)$ 取为其在无穷远处的值 $\phi(x, r = \infty) \equiv \phi_0(x)$ 。公式(1.54)的左边可用来计算算符关联函数，而且这些算符在场论中是规范不变的；同时，从公式(1.54)容易看出每一个这样的规范不变算符都有一个对偶弦论中的场与之对应，文献中称之为场/算符对应。由于弯曲空间中超弦的量子化至今没有一个完整的理论，所以公式(1.54)的直接应用是很困难的。然而如果只考虑场论中的特殊极限 $N \rightarrow \infty$ 并且 $\lambda \rightarrow \infty$ ， $AdS_5 \times S^5$ 中的超弦理论退化为一个经典的超引力；而且，对于这个经典超引力理论的配分函数可以采取鞍点近似处理，即在作用量的泛函积分中只计入场的经典构型对于作用量的贡献。在(1.4.2)一节中将以标量场为例说明如何将对偶方案(1.54)应用于计算推迟格林函数。下面以场论中的标量算符 \mathcal{O} 与超引力中的标量场为例来说明场/算符对应的物理含义。考虑 AdS_{d+1} 中传播的质量为 m 的标量场 $\phi(u, x)$ ，其满足如下运动方程：

$$(\square_{d+1} + m^2) \phi(u, x) = 0, \quad (1.55)$$

其中, \square_{d+1} 为 AdS_{d+1} 中的达朗贝尔算符。进一步假设 $\phi(u, x) \sim e^{ik \cdot x} \phi(u)$, 分析上述运动方程在 AdS_{d+1} 共形边界 $u = 0$ 处的行为可得到如下的质量-维数关系

$$\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 L^2}, \quad (1.56)$$

而且与之对应的 $\phi(u, x)$ 的渐进行为如下

$$\phi(u, x) \stackrel{u \rightarrow 0}{\approx} \phi_0(x) u^{d-\Delta} + \phi_1(x) u^\Delta. \quad (1.57)$$

上式中 $\phi(u, x)$ 在 $u = 0$ 处的两个模式是可以通过它们的可归一性来区别的⁹: 正比于 u^Δ 的模式是可归一化的, 它的系数 $\phi_1(x)$ 对应于算符 $\mathcal{O}(x)$ 的真空期望值; 正比于 $u^{d-\Delta}$ 的模式是不可归一化的, 它的系数 $\phi_0(x)$ 给算符 \mathcal{O} 提供源, 可以假想在场论中拉氏量中引入相互作用项 $\int d^d x \phi_0(x) \mathcal{O}(x)$ 。

由于 AdS/CFT 对应是一个强弱对偶猜想, 在现有的理论框架下直接证明这个猜想具有很大的困难。因此, 对该对偶猜想进行理论检验就显得尤其重要。到目前为止, 这些理论检验均有力地证明该猜想的可靠性。本小节内容主要根据经典综述[15]对这些理论验证做简单的总结。强弱对偶的特性使得这些检验只能依赖于对偶两边的那些与耦合常数无关的性质, 这主要包括:

- 整体对称性。AdS/CFT 对应的两边有相同的整体对称性群 $PSU(2, 2|4)$, 其玻色部分为子群 $SO(2, 4) \times SU(4)$ 。其中, $SO(2, 4)$ 在对偶理论两边分别对应于共形变换和等距群, 已经分别在(1.1)和(1.2)这两部分做了详细的介绍; $SU(4)$ 部分在场论这边是超对称生成元的 R 对称性, 而它在弦论或者低能超引力这边对应于紧致化维度部分 S^5 的转动对称性。费米型对称性在对偶两边的匹配分析可参见[15]。
- 与反常相关的关联函数。一些关联函数不受量子修正, 它们同时不依赖于 't Hooft 耦合常数 $\lambda \equiv g_{YM}^2 N$ 。这些关联函数通常与反常有关, 主要包括与 $SU(4)$ R 对称性的反常相关的矢量流三点函数和与 Weyl 反常相关的能动量张量的两点及三点函数。
- 手征原初算符的谱。在对偶场论这边, 按照共形变换对这些算符的共形维数进行分类, 并计算出其表示。文献中主要对单迹算符做了详细的分

⁹这里的讨论仅限于 $m^2 \geq 0$ 的情形, 相应于只有一种量子化的方案; 然而, 从公式(1.56)可见 AdS 空间中粒子质量平方可以为负值, 这样会导致另外一种量子化方案的出现, 详细的讨论可参考[25]。

析。由于在AdS/CFT对应中，场论中规范不变的算符与其对偶超弦理论中的场有着一一对应的关系。因此，可以计算 $AdS_5 \times S^5$ 中的IIB型超弦的所有场的谱，并与场论中的讨论比较。然而，至今仍然没有办法对这个超弦理论做全部的谱分析，在[26]中对 $AdS_5 \times S^5$ 上紧致的IIB型超引力的谱做了全面的分析，这个计算过程需要将超引力中10维的场按照 S^5 上合适的球谐函数做展开。其结果可以按照超共形代数的表示进行分类，与场论中的分析能很好的匹配。

- 某些算符的关联函数。共形对称性对关联函数的形式有很大限制，这些特性与共形场论的耦合强度无关，在(1.1)一节中对标量算符的两点及三点函数已有简略的讨论。 $\mathcal{N} = 4$ 超共形杨-米尔斯理论中算符关联函数的计算可以在其微扰区进行，应用AdS/CFT对应可以通过微扰弦论的配分函数来计算该共形场论强耦合区的一些关联函数。
- Wilson圈的计算，它是一个非定域的规范不变的算符。Wilson在1974年[27]引入该算符时是为了理解QCD的非微扰性质，

$$W[C] \equiv \text{Tr} \left[P \exp \left(i \oint_C A \right) \right]. \quad (1.58)$$

从该算符的真空期望值可以计算夸克-反夸克的势能。应用AdS/CFT对应计算该物理量可以参见原始文献[28, 29]，它将Wilson算符与最小面积联系起来。

- 模空间的分析。
- 在相关算符或者边缘算符形变的作用下该理论的定性行为。关于质量形变在对偶理论两边的具体效应将会(1.4.2)一节中做简单的叙述。

1.4.2 规范/引力对偶

Maldacena最初关于AdS/CFT对偶猜想仅限于 $\mathcal{N} = 4$ 的超对称杨-米尔斯理论与 $AdS_5 \times S^5$ 空间中的IIB型超弦理论之间的对等，它是一个处于平直时空中特殊的共形场论(没有引力的量子理论)与弯曲时空中的超弦理论(包含引力的理论)的对偶猜想。在大 N 、大 λ 耦合极限下， $AdS_5 \times S^5$ 中的IIB型超弦理论退化为经典的IIB型超引力。虽然这个特定理论之间的对偶极大的影响了人们对于

规范理论和引力量子化的认识，但是由于这个对偶的成立是建立在很大的对称性之上的，它的可应用性因此受到很大的限制。因此，将该对偶猜想做进一步的推广进而希望它能在更广泛的领域内应用是很有必要的。

有限温度场论与AdS-Schwarzschild黑洞 在 $\mathcal{N} = 4$ 超共形场论中引入温度会明显地破坏超对称和共形对称性，但是在该对偶猜想中引入温度对于研究热规范理论以及其它一些重要的物理系统来说具有重要意义。根据Witten的论述[30]，热规范理论的引力对偶可以通过将 $AdS_5 \times S^5$ 扩展到AdS-Schwarzschild黑洞几何来实现。早在AdS/CFT对应建立之前，人们就已经对AdS-Schwarzschild黑洞热力学的性质做出了重要的研究。特别地，Hawking和Page在[31]中发现，在临界温度 T_{hp} 处存在一级相变：热AdS($T < T_{hp}$)和AdS-Schwarzschild黑洞($T > T_{hp}$)。Witten在[30]中通过AdS/CFT对应将这种一级热相变用来解释规范理论的禁闭/退禁闭相变。

准确地讲，AdS-Schwarzschild黑洞对偶于热规范理论¹⁰的平衡态；通过这个对偶关系，规范理论的一些热力学性质如压强、熵、能量密度等可以通过其对偶引力黑洞的热力学计算而得到[15]。有限温度场论的非平衡态行为(这里仅限于微小程度的偏离平衡态)可以用线性响应来描述，其核心物理量是推迟格林函数。在AdS/CFT对偶框架下，可以用对偶引力中的微扰计算来研究有限温度下强耦合场论的性质。一个有效的计算实时间两点推迟格林函数的方案是在[33]中提出的，下面以5维AdS-Schwarzschild黑洞几何中的标量场为例说明该方案。为了便于以后的计算，这里将AdS-Schwarzschild黑洞几何度规写成如下的形式：

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{R^2}{z^2} \left(-f(z)dt^2 + d\vec{x}^2 + \frac{dz^2}{f(z)} \right), \\ &\equiv g_{zz}dz^2 + g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\ f(z) &= 1 - \frac{z^4}{z_H^2}, \quad T = \frac{1}{\pi z_H}, \quad z \in [0, z_H]. \end{aligned} \tag{1.59}$$

其中， $z = 0$ 为渐近AdS空间的共形边界， $z = z_H$ 为黑洞的事件视界。对偶场论中的标量算符 \mathcal{O} 与该几何中的标量场 ϕ 相对应，且它在上述黑洞几何中的作用

¹⁰关于有限温度场论的基本论述可以参见[32]。

量为¹¹

$$S = K \int d^4x \int_0^{z_H} dz \sqrt{-g} [g^{zz} (\partial_z \phi)^2 + g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2], \quad (1.60)$$

其中 K 为归一化常数，与标量场的属性有关； m 是标量场的质量参数。线性化的运动方程为

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_z (\sqrt{-g} g^{zz} \partial_z \phi) + g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - m^2 \phi = 0. \quad (1.61)$$

通常，方程(1.61)是在动量空间求解的，做如下傅里叶变换

$$\phi(z, x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} f_k(z) \phi_0(k), \quad (1.62)$$

这里的 $\phi_0(k)$ 由如下的边界条件决定

$$\phi(z=0, x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} \phi_0(k). \quad (1.63)$$

将公式(1.62)代入(1.61)可知 $f_k(z)$ 由下列方程决定

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_z (\sqrt{-g} g^{zz} \partial_z f_k(z)) - (g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu + m^2) f_k(z) = 0. \quad (1.64)$$

$f_k(z)$ 在 $z=0$ 处满足 $f_k(z=0) = 1$ 的边界条件；它在事件视界 $z=z_H$ 处需满足入射波的边界条件，这是由计算推迟格林函数这个目的决定的。

将(1.60)中的作用量做分部积分并使用运动方程(1.61)和(1.64)可将标量场在壳作用量化简到如下的表面项

$$S = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \phi_0(-k) \mathcal{F}(k, z) \phi_0(k) \Big|_{z=0}^{z=z_H}, \quad (1.65)$$

$$\mathcal{F}(k, z) = K \sqrt{-g} g^{zz} f_{-k}(z) \partial_z f_k(z).$$

在应用AdS/CFT对偶方案(1.54)计算关联函数时需要注意，为了使得到的推迟格林函数满足其一般属性，只需要保留因子 $\mathcal{F}(k, z)$ 在边界 $z=0$ 的取值，即

$$G^R(k) = -2\mathcal{F}(k, z) \Big|_{z=0} \quad (1.66)$$

¹¹得到该作用量时已经将紧致化维度部分 S^5 的积分因子包含在 K 中，而且为简单起见不考虑标量场在 S^5 上的激发。

从全息对偶方案(1.54)出发并加入一些物理的考虑从而得到的推迟格林函数的公式(1.66)是应用AdS/CFT对应及其推广计算一些物理量的重要工具，该方案的进一步讨论可参见[34]。

基础表示物质场的引入 $\mathcal{N} = 4$ 超对称杨-米尔斯理论只包含属于规范群 $SU(N)$ 伴随表示的场，与QCD理论类比可知：在该规范理论中引入处于规范群基础表示的物质场是很有意义的。它是在[35]中通过在D3-brane对应的超引力背景中引入另外的探测D-brane来实现的，文献中通常称这一过程为“在AdS/CFT中加入味道”。下面以D3/D7模型为例简单说明该观念的实现，表格(1.1)表示味道D7-brane在D3-brane对应的AdS背景中的排列构型 记 N_f 为加入的D7-

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D3	×	×	×	×						
D7	×	×	×	×	×	×	×	×		

表 1.1: D3/D7模型

brane的数目，当 $N_f \ll N$ 时，D7-brane对背景超引力几何的影响可以忽略不计，文献中也称之为探测极限。D3/D7系统在AdS/CFT对应的的研究中引起了广泛的兴趣，主要包括QCD引力对偶及介子质量谱、手征对称性破缺、夸克物质的相变、味道输运性质、 p 波超导体等等，有关内容的详细讨论可参考综述[8, 36]。如果只限于讨论D7-brane上的动力学，D3/D7系统可以用D7-brane在 $AdS_5 \times S^5$ 中的有效作用量来描写

$$S_{D7} = S_{DBI} + S_{CS}. \quad (1.67)$$

上式中各部分的具体表达形式可以将公式(1.40)和(1.41)应用于D7-brane而得到。有关该系统更详细的描述可参见[37]。

有限密度与化学势 在AdS/CFT对应中引入物质电荷密度与化学势是该对偶的另一种很重要的推广，在研究夸克胶子等离子体、强耦合凝聚态系统、量子相变等问题中是至关重要的。在AdS/CFT中引入基础表示的物质场以后，可以在D7-brane的world-volume上的规范场 $U(N_f) \simeq U(1)_B \times SU(N_f)$ 中适当的给予规范场某些分量的背景值。具体说来，当赋予 $U(1)_B$ 部分如下的背景时

$$A_t(r) \neq 0, \quad \partial_r A_t(r) \neq 0, \quad (1.68)$$

就引入了 $U(1)_B$ 相应的重子荷及其相应的重子化学势。规范势 $A_t(r)$ 的构型由D7-brane的作用量来决定；在AdS空间的共形边界 $r = \infty$ 处有渐进行为

$$A_t(r) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\approx} \mu_B + \frac{d_t}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right). \quad (1.69)$$

这里， μ_B 应当理解为重子荷密度， d_t 是相应的化学势。规范场的其它分量如 $A_{x,y,z}(r)$ 也可以赋予相应的背景值，然而AdS共形边界上对偶场论的平移对称性通常要求这些背景场只依赖于全息坐标 r 。这些规范势的各个分量在 $r = \infty$ 处的渐进行为可以和 A_t 分量有类似的分析，这里不再赘述。如果赋予非阿贝尔 $SU(N_f)$ 部分规范势时间分量的背景，文献中习惯性地将其对应于同位旋化学势和荷密度，用D3/D7模型构建 p 波超导体就是这样一个例子。

一般D p -brane的几何 Maldacena在其AdS/CFT对偶猜想时主要考虑了D3-brane的情形，它的特殊性在于 g_s 不依赖于全息坐标 r 。在(1.3.2)一节中已经列出了一般D p -brane所对应的第II类超引力的解，见公式(1.43)。在近视界极限下，这些度规是不同于AdS空间的，这与一般D p -brane上的低能有效场论不是共形的这一事实是一致的。可以对一般的D p -brane做与D3-brane相似的分析，从而将Maldacena最原始的对偶猜想推广到其它维数的时空中[38]。D p -brane的world-volume上规范理论的耦合常数由下式确定

$$g_{YM}^2 = 2(2\pi)^{p-2} g_s l_s^{p-3}. \quad (1.70)$$

如果考虑退耦极限 $l_s \rightarrow 0$ (同时固定能量和 g_{YM})，对应于不同的参数选取，该系统应当按照不同的理论进行描述。文献[38]对一般的情形做了分析并用合适的参数做出了该系统对应于不同的维数需要用何种理论描述的相图。在对偶场论中定义如下无量纲的耦合常数

$$g_{eff}^2 \sim g_{YM}^2 N u^{p-3}, \quad u \equiv \frac{r}{\alpha'}. \quad (1.71)$$

这个相图正是按照 $\{N, g_{eff}\}$ 这两个无量纲的参数来描述的，这里的 u 对应于能量标度，关于相图的具体论述可以参看[38]。

唯象引力模型 AdS/CFT对应的另一个大胆推广是所谓的应用AdS/CFT，通俗的讲就是用最小的引力模型来模拟一些强耦合现象，如高温超导行为、量子临界行为、非费米液体及费米面等，将非引力问题几何化，同时将这些强关联现象中的对称性表达成引力几何度规的对称性。这些模型主要用来理解凝聚态物理中的一些难以用传统方法处理的物理现象[9, 10, 39]。根据Hartnoll在[10]中

的论述，应用性的AdS/CFT对应中所需要的最小理论框架为：

d维时空中的大N规范理论 \longleftrightarrow **(d+1)维时空中的经典引力理论.**

d维时空中场论的整体对称性 \longleftrightarrow **(d+1)维时空中的经典引力的规范对称性.**

由于凝聚态物理中经常研究有限密度有限温度的体系，在应用AdS/CFT的框架下可以在引力模型中引入 $U(1)$ 规范场来实现密度的引力对偶，有限温度可以通过在几何中加入黑洞来实现。这样的一个最小引力模型具有如下的作用量

$$S = \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\kappa^2} \left(R + \frac{d(d-1)}{L^2} \right) - \frac{1}{4g^2} F^2 \right\}, \quad (1.72)$$

其中， $F = dA$ ， $A = A_t dt$ 。上述引力系统是处于一个具有负宇宙学常数 $\Lambda = -d(d-1)/2L^2$ 的时空中，这是AdS/CFT对应的一个关键之处。它的一个包含Schwarzschild黑洞的解析解就是所谓的RN- AdS_{d+1} 黑洞，它在AdS/CFT对应的应用研究中引起了广泛的关注，特别是在用于研究量子临界输运和非费米液体的引力实现中。

另外一个重要的唯象模型是关于高温超导体的引力对偶，也称为全息超导[40, 41]。它是基于渐近AdS黑洞中无毛定理的研究[42, 43]而构建的。Gubser在[43]中指出：考虑RN-AdS黑洞时空中阿贝尔Higgs模型，当黑洞的电荷和标量场的电荷均足够大而它们的质量却足够小时，在黑洞视界附近阿贝尔Higgs模型会出现自发对称性破缺。如果将这种自发破缺的对称性与电磁场中的 $U(1)$ 对应，它表明黑洞视界类似于超导体。这一模型在[40, 41]中又做了详细的研究，并给出了对称性破缺相下的基态及其一些重要性质。

以上所讨论的引力模型都具有渐近AdS的形式，也就是说这些几何在共形边界上趋于AdS时空。从全息重整化的角度讲，渐近AdS时空对偶于一个高能区的共形场论，它是该系统的一个紫外不动点，而且它有相对论对称性。能否用规范/引力对偶的思想对低能区的非相对论系统的物理特性做出一些研究不仅具有现实意义而且能对该对偶猜想的一般性作出窥探。文章[44]构建了Lifshitz固定点的引力对偶实现。按照文献[10]中的论述，这个引力系统具有如下形式的度规

$$ds^2 = L^2 \left(-r^{2z} dt^2 + r^2 \sum_{i=1}^d dx_i^2 + \frac{dr^2}{r^2} \right). \quad (1.73)$$

该度规具有如下的标度对称性

$$t \rightarrow \lambda^z t, \quad x^i \rightarrow \lambda x^i.$$

这个几何在[45]中被用于实现凝聚态物理中的奇异金属行为，并得到了很多重要的结论。该模型在凝聚态物理中的相关问题研究中引起了人们广泛的关注。

虽然上述这些全息模型在某些方面能够很好的描述凝聚态系统中的重要概念，但是由于它们终究只是一个唯象模型，其对偶场论的具体内容仍然不是很清楚，这些是唯象模型的主要缺陷。文献中习惯将规范/引力对偶的应用模型分为下列两大类：

(1)Top-Down模型，这类模型一般是根据一个完整的超弦、M-理论或者规范的超引力模型出发建立一个在对偶两边均比较清楚的AdS/CFT对应框架。一般说来这类模型要求的对称性较多，对于实际物理系统有较大的限制。然而，其对偶场论一边是可以理解的。

(2)Bottom-Up模型，与上一类模型恰恰相反，它是为了描述某一些物理现象而假设的最小引力框架，在规范/引力对偶的应用中具有很高的实用价值，尽管它在对偶场论边的信息不充分。

在这篇论文中，我们将交互使用这两类模型进行一些应用研究。一方面对这两类模型进行比较，同时也对规范/引力对偶在强耦合问题中的普适性做出一些评估。

第二章 强耦合夸克胶子等离子体的引力对偶

本章将应用规范/引力对偶这个强有力的数学工具来研究夸克胶子等离子体(quark-gluon plasma)的一些重要性质。夸克胶子等离子体是量子色动力学在极端高温高密度条件下的一种状态，也称为夸克汤(quark soup)，由渐近自由的夸克和胶子组成。在夸克物质的相图上，夸克胶子等离子体位于高温高密度区域，而普通物质是一种由核与真空组成的冷且稀薄的混合物，假想的夸克星是由相对较冷但却很密集的夸克物质组成。Brookhaven国家实验室的相对论重离子碰撞(RHIC)实验和欧洲核子中心的ALICE实验是目前研究极端高能量高密度下夸克物质属性的最重要的两个实验。虽然到目前为止，夸克胶子等离子体只是一个理论概念，但是一些实验数据和理论分析均强有力的支持它的存在；并且，这些研究表明它在一些行为上是一种强耦合的近乎理想的流体。这是规范/引力对偶能够应用于研究夸克胶子等离子体性质的主要原因。

2.1 夸克胶子等离子体与全息模型

这一节简单陈述从RHIC实验数据得出的关于夸克胶子等离子体的一些重要性质，这些内容主要依赖于[46, 47]。此外，我将简要回顾全息对偶方法在描述夸克胶子等离子体性质方面的一些主要进展。

2.1.1 夸克胶子等离子体性质概述

从RHIC实验中观测到的粒子谱的软部分($p_t < 2\text{GeV}$)和硬部分($p_t > 2\text{GeV}$)的相关数据分析可知夸克胶子等离子体具有如下性质：

从普通物质到夸克胶子等离子体的相变发生于一个普适的温度 $T_c \approx 170\text{MeV}$ 附近，这与预期的临界温度是一致的。流体动力学方面，夸克胶子等离子体的状态方程(压强作为能量密度的函数)的参数可以由这些实验数据确定，例如QCD的相变潜热约为 $800\text{MeV}/\text{fm}^3$ 。这些实验数据进一步的证实了所预期的在相变区域以上状态方程 $p \approx \epsilon/3$ 。与上述这些属性相比，夸克胶子等离子体的输运性质与所预期的完全不一致。为了维持所观测到的集体性程度(degree of collectivity)所需要的组分重散射比微扰QCD所预测

的大 $1 \sim 2$ 个量级。而且，夸克胶子等离子体的粘滞系数 η 与熵密度 s 比值约为 $\eta/s \approx 1/10$ ，这使得它很接近于理想流体的值。

在很长的一段时间里，夸克胶子等离子体被认为是一种由相互作用比较弱的准粒子组成的气体。基于这一观念，大量的理论工作集中于如何提炼热QCD在高温区的微扰计算来研究夸克胶子等离子体的热力学和动力学。然而这一观点却受到下列论述的挑战：

- (1)在临界温度 T_c 之上禁闭和手征对称性破缺消失，然而却没有大量的自由荷来生成较大的Debye质量。
- (2)流体动力学在研究夸克胶子等离子体的性质时取得了很大的成功，然而用各种配分子级联弱耦合的模型来描述这种等离子体是明显失败的。
- (3)格点QCD的计算表明，在临界温度 T_c 附近最低能量的粲夸克偶素束缚态并不熔化，而且至少可以在 $T \sim 2T_c$ 温度以下存在。类似地，由轻夸克组成的束缚态可以在夸克胶子等离子体相中存在。

以上这些论述告诉我们：夸克胶子等离子体的准粒子在几个 T_c 附近有较强的相互作用，这是与很长一段时期的认识不一致的；因此，可以将QCD的这种状态称为强耦合的夸克胶子等离子体。

夸克胶子等离子体的一个重要特性在于它具有集体流行为(collective flows)。实际上，重离子碰撞的最初目标并不仅仅是为了增加每个事例所产生的次级产物粒子数目；这一项目同时也为了能在动力学上达到比系统尺寸 L 更小的另一个不同能区，由一个更小的微观尺度 l 来标记(如平均自由程)。如果达到这一目标，就可以将重离子碰撞产生的火球当做宏观实体来处理，可以研究它的热力学和流体动力学。实际上，统计模型在描述重离子碰撞方面是很成功的。由于这一行为的具体描述与本论文的研究内容没有直接关系，这里不再做详细讨论，可参考[46, 47]。有关夸克胶子等离子体的唯象方面的系统叙述，可以参考文献[8]中的第二部分。

2.1.2 夸克胶子等离子体的全息模型简介

由于夸克胶子等离子体是一种强耦合的体系，微扰QCD的计算自然不能满足要求；格点QCD的方法虽然能够对热QCD的一些热力学性质做出计算，但是它在处理其它诸如动力学属性方面仍然具有很大的挑战性。格点QCD方法内在的欧几里得特性(它使用虚时间的形式)使得夸克胶子等离子体的很多属性

很难用格点的方法来研究。目前，仍然没有一个解析的方法来系统的处理非微扰QCD。规范/引力对偶是一个强有力的数学工具：它将强耦合的规范理论与弱耦合的超弦理论等价起来，因此它为我们提供了一个研究夸克胶子等离子体这种强耦合系统的可能的数学工具。如果将 $\mathcal{N} = 4$ 超对称杨-米尔斯理论推广到有限温度情形，可以将其简单的视为与夸克胶子等离子体相类似的一个模型，应用规范/引力对偶研究这个玩具模型可以得到如下结论：

(1)通过全息的方法计算零温下Wilson圈的真空期望值可以得到静态夸克-反夸克的势能 $V(r)$ ，在't Hooft耦合常数 $\lambda \gg 1$ 时，它符合一个修改过的库伦定律[28, 29]

$$V(r) = -\frac{4\pi^2}{\Gamma(1/4)^4} \frac{\sqrt{\lambda}}{r} \quad (2.1)$$

(2)在 $\lambda \gg 1$ 的极限下，它的自由能可以表达成如下的形式[48]

$$F(T, N, \lambda) = \left(\frac{3}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \right) F(T, N, 0), \quad F(T, N, 0) = N^2 T. \quad (2.2)$$

其中， $F(T, N, 0)$ 对应于自由理论的自由能。

(3)有限温度下，重夸克势能完全被屏蔽在Debye半径之内，而且这个半径具有 $1/T$ 的量级。这就导致了质量量级为 $\sim \sqrt{\lambda}T$ 的准粒子的存在。

(4)剪切粘滞系数 η 很小，与熵密度 s 的比值有如下关系式[49]，

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi}. \quad (2.3)$$

这一数值与实验测得的 $1/10$ 很接近。实际上，研究发现强耦合物质的粘滞系数异常的小，这使得即使在很小的空间尺度上也能用流体动力学来描述它。公式(2.3)是规范/引力对偶应用于研究强耦合夸克胶子等离子体的一个很重要的结论，最新的研究结果表明该公式具有一定的普适性[50–52]。

综合以上研究结果，可以做出如下论断：虽然在零温下的 $\mathcal{N} = 4$ 超对称杨-米尔斯理论和QCD理论具有很大的区别，然而由于有限温度明显的破坏超对称性和共形对称性，我们有理由相信 $\mathcal{N} = 4$ 超对称杨-米尔斯理论与QCD理论具有一些相似的属性，因此可用来研究夸克胶子等离子体的一些性质。除了有限温度下的 $\mathcal{N} = 4$ 超对称杨-米尔斯理论及其引力对偶外，还有其它一些模型用于研究夸克胶子等离子体，作为本节的结尾和后文叙述的方便，下面将简略的介绍这些全息QCD模型。这些模型更好地包含了QCD的手征对称性破缺和

禁闭/退禁闭相变，从而使规范/引力对偶的描述更接近于QCD理论。

有限温度的D3/D7模型

零温下的D3/D7模型已经在1.4.2一节中有所描述，很容易将其推广到有限温度的情形。其中，D3-brane与D7-brane的位型仍如表1.1中所示；有限温度下D3-brane所对应的超引力几何为¹

$$ds^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{u_0 \rho}{L} \right) \left[-\frac{f^2}{\tilde{f}} dt^2 + \tilde{f} d\vec{x}^2 \right] + \frac{L^2}{\rho^2} [d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_5^2], \quad (2.4)$$

$$f(\rho) = 1 - \frac{1}{\rho^4}, \quad \tilde{f}(\rho) = 1 + \frac{1}{\rho^4}.$$

其中紧致化维度部分可以做如下参数化

$$\begin{aligned} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_5^2 &= d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_3^2 + \cos^2 \theta d\phi^2) \\ &= dr^2 + r^2 d\Omega_3^2 + dR^2 + R^2 d\phi^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

这里， (R, ϕ) 代表S²方向的坐标。D7-brane在上述黑洞几何的构型由 $\chi(\rho) = \cos \theta(\rho)$ 表达。这样，上述黑洞几何在D7-brane的world-volume上的诱导度规为

$$ds^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{u_0 \rho}{L} \right) \left[-\frac{f^2}{\tilde{f}} dt^2 + \tilde{f} d\vec{x}^2 \right] + \left(\frac{L^2}{\rho^2} + \frac{L^2 \dot{\chi}^2}{1 - \chi^2} \right) d\rho^2 + L^2 (1 - \chi^2) d\Omega_3^2, \quad (2.6)$$

其中， $\dot{\chi} \equiv d\chi/d\rho$ 。数学上讲，D7-brane的构型由其在上述几何中的作用量取极值得到， $\chi(\rho)$ 满足二阶非线性的常微分方程，一般情形下没有解析解，详细的讨论可见[53]。

当 $\rho \rightarrow \infty$ 时， $\chi(\rho)$ 有如下的渐近行为

$$\chi(\rho) \approx \frac{m}{\rho} + \frac{c}{\rho^3}, \quad (2.7)$$

利用规范/引力对偶的方案可知系数 m, c 通过下列关系式与夸克质量 M_q 和凝聚 $\langle \mathcal{O}_m \rangle$ 相联系

$$\begin{aligned} M_q &= \frac{u_0 m}{2^{3/2} \pi l_s^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda} T m, \\ \langle \mathcal{O}_m \rangle &= -2^{3/2} \pi^3 l_s^2 N_f T_{D7} u_0^3 c = -\frac{1}{8} \sqrt{\lambda} N_f N T^3 c. \end{aligned} \quad (2.8)$$

通过对 $\chi(\rho)$ 满足方程的讨论可以将D7-brane在D3-brane的背景黑洞中的构型分为如下三类：

¹这里采用[53]中的习惯。

(1) 闵氏嵌入(Minkowski embedding), 对应于 T/M_q 较小的情况, 这时D3-brane黑洞的引力吸引作用不足以将D7-brane拖入黑洞视界内。因此, D7-brane光滑地终止于黑洞视界外, 而且诱导度规(2.6)没有黑洞视界。

(2) 临界嵌入(Critical embedding), 它表示D7-brane恰好终止于黑洞视界处, 代表一种临界行为。

(3) 黑洞嵌入(Black hole embedding), 这种情形对应于较大的 T/M_q , 这时黑洞的温度足够高, 能够将D7-brane拖入黑洞视界内。而且, 在D7-brane的world-volume上的诱导度规(2.6)有黑洞视界。

图2.1示意性的描绘了随着温度的升高D7-brane在各种嵌入方式间的相互转变。

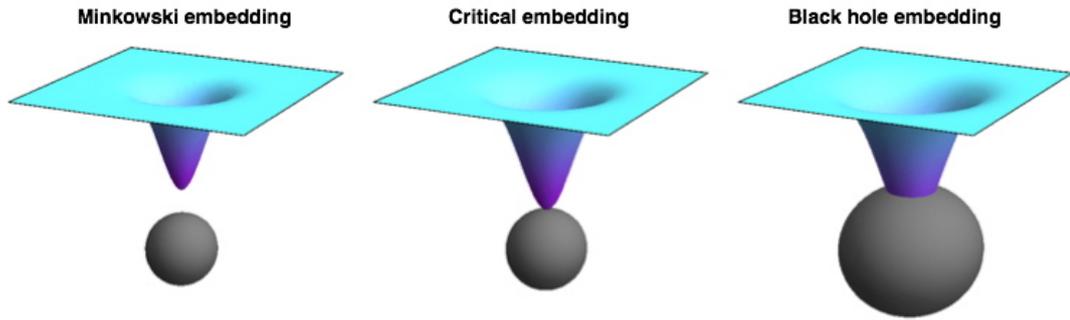


图 2.1: D7-brane在D3-brane的黑洞背景时空中的构型。从左到右表示随着黑洞温度的升高, D7-brane的构型由闵氏嵌入相变到黑洞嵌入。此图来源于[8]。

通过对该系统热力学研究发现, D7-brane的构型从闵氏嵌入到黑洞嵌入的转变是一个不连续变化的过程, 对应于一级相变。具体地讲, 当黑洞温度相对于夸克质量 M_q 来说较低时闵氏嵌入是热力学稳定的, 研究玻色激发(对应于介子谱)可以证明在闵氏嵌入的构型下这些介子模式以稳定的束缚态形式存在; 反之, 当黑洞温度升高到临界值时, 黑洞嵌入的构型是热力学稳定的, 介子通过熔化成为夸克胶子等离子态, 可以用准正常模式的概念来描述它们。然而, 上述一级相变并不对应于禁闭/退禁闭相变; 实际上, 由于D3-brane的黑洞背景时空的存在, 该一级相变中的两相均处于胶子退禁闭相中。通过D7-brane上的介子模式的计算, 可以将这个一级相变对应于重夸克偶素介子的解离(dissociation), 文献中习惯将这一相变与QCD的手征相变相联系。关于介子在这个一级相变过程中的行为转变的详细讨论可以参考[8]。

上述系统在温度变化下的相变行为是在两参数空间(M_q, T)中讨论的, 进一步的研究表明在该全息模型中加入外场(如重子数密度和化学势、磁场以及电流)可以改变相变的临界温度, 同时也会对该相变的基本属性有所改变, 相关的研究可以参考原始文献[54–58]。

AdS/QCD模型

自从规范/引力对偶被发现后, 人们希望它能够在研究QCD的低能物理行为中有所帮助, AdS/QCD模型[59, 60]就是为了这个目的而被提出的。其主要思想在于从QCD理论出发, 尝试建立其五维的全息引力对偶。然而, 低能QCD的禁闭和手征对称性破缺是该理论的两个重要性质, AdS/QCD模型正是在考虑到QCD的这两个性质的基础上建立起来的。考虑一个纯粹 AdS_5 的时空, 将第五维坐标(全息坐标)在红外区域做截断处理

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2), \quad 0 < z < z_m. \quad (2.9)$$

根据全息对偶原理, 第五维坐标 z 对应于场论中的能量标度, 它与QCD中的转移动量平方 Q^2 有如下关联

$$Q \sim \frac{1}{z}. \quad (2.10)$$

可见, 截断 z_m 相当于在QCD的红外区引入标度 $Q_m \sim 1/z_m$ 。如同D3/D7模型, 为了研究强子的行为, 需要在上述背景中引入夸克场和描述手征对称性破缺的序参量, 这些场与QCD中的算符的对应形式如表2.1。在bulk中, 上述场的动

4D: $\mathcal{O}(x)$	5D: $\phi(x, z)$	Δ	m_5^2
$\bar{q}_L \gamma^\mu t^a q_L$	$A_{L\mu}^a$	3	0
$\bar{q}_R \gamma^\mu t^a q_R$	$A_{R\mu}^a$	3	0
$\bar{q}_R^\alpha q_L^\beta$	$(2/z)X^{\alpha\beta}$	3	-3

表 2.1: AdS/QCD模型中的场与算符对应关系

力学由下面的作用量来决定

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \text{Tr} \left\{ |DX|^2 + 3|X|^2 - \frac{1}{4g_s^2} (F_L^2 + F_R^2) \right\}, \quad (2.11)$$

$$A_{L,R} = A_{L,R}^a t^a, \quad D_\mu X = \partial_\mu X - iA_{L\mu} X + iX A_{R\mu},$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu].$$

作用量中的场 X 用来描述QCD中的手征对称性，它在AdS边界处 $z = 0$ 的渐近行为如下

$$X(z) \approx \frac{1}{2}Mz + \frac{1}{2}\Sigma z^3, \quad z \rightarrow 0. \quad (2.12)$$

根据全息对偶方案可知， m 和 Σ 分别对应于夸克质量矩阵和手征凝聚。同时，通过研究这些场的经典动力学可以对应实验中的介子质量谱，研究发现[59, 60]该模型能够较好的描述这些介子激发态。然而，该模型的一个理论缺陷在于它在红外能区的截断是人为引入的，同时它不能解释强子谱的线性禁闭行为。这两个问题的进一步解决是在[61]中通过引入一个非平庸的伸缩子 $\Phi(x)$ 使得 AdS_5 的度规在红外能区有一个有效的截断，作用量(2.11)相应地做如下修改

$$S = \int d^5x e^{-\Phi(x)} \sqrt{-g} \text{Tr} \left\{ |DX|^2 + 3|X|^2 - \frac{1}{4g_s^2} (F_L^2 + F_R^2) \right\}. \quad (2.13)$$

这个模型(2.13)在文献中称为软墙截断的AdS/QCD模型(soft-wall AdS/QCD model)，而在度规的红外区人为的引入截断的模型(2.11)习惯性的称为硬墙截断的AdS/QCD模型(hard-wall AdS/QCD model)。本论文中将利用这两个模型分别研究电磁信号和磁场诱导的超导相变。

Sakai-Sugimoto模型

虽然上面的两类全息QCD模型能在一定程度上较好的描述QCD的一些现象，但是它们或多或少的有一些不足。例如，D3/D7模型不能描述QCD的禁闭；AdS/QCD模型是唯象的模型，没有一个基本的理论框架保证其理论的完整性，是一种Bottom-Up的建构方式。一个既能够很好的描述低能QCD的介子谱、手征相变、禁闭/退禁闭相变，又具有完整的理论基础的模型是由Sakai和Sugimoto在Witten关于禁闭/退禁闭相变的全息描述[30]的基础上建立起来的，文献中习惯称其为Sakai-Sugimoto模型[62, 63]。它是在D4-brane所对应的IIA型超引力几何中引入适当构型的味道D8/ $\bar{D}8$ -brane实现的，具体的构型见表2.2。Sakai和Sugimoto在[62, 63]中将该模型用于描述强子物理并做了全

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D4	×	×	×	×	×					
D8/ $\bar{D}8$	×	×	×	×		×	×	×	×	×

表 2.2: Sakai-Sugimoto模型

面的研究，即他们的研究主要集中在禁闭相中，可概括为如下这些方面：

(1)介子质量谱的计算。利用D8-brane的低能有效作用量，介子谱中无质量的 Π 介子，对应于手征对称性破缺而产生的Nambu-Goldstone玻色子。

(2) Π 介子的低能有效作用量可以从D8-brane的低能有效作用量中得到，它包含手征拉矢量形式中的动能项和Skyrme项。

(3)动力学重子可以通过特定的D-brane构型来实现，与Skyrmion等同。

(4)最轻的矢量介子的有效作用量。

(5)Kawarabayashi-Suzuki-Riazuddin-Fayyazuddin关系式的实现。

(6)反常与Wess-Zumino-Witten项。

(7) η' 介子的质量，满足Witten-Veneziano关系式。

(8) Π 介子、矢量介子以及外加规范场间的相互作用。

根据Witten在[30]中的论述，D4-brane在10维时空中对应的IIA型超引力可以有两种不同的解：渐近的AdS黑洞时空和渐近的AdS孤子(soliton)；它们分别对应于大 N 规范理论的退禁闭相和禁闭相。具体说来，当温度较高时，系统处于退禁闭相，对应于D4-brane的黑洞几何解

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{u}{R_4}\right)^{3/2} (-f(u)dt^2 + d\vec{x}^2 + dx_4^2) + \left(\frac{R_4}{u}\right)^{3/2} \left(\frac{du^2}{f(u)} + u^2 d\Omega_4^2\right), \\ e^\Phi &= g_s \left(\frac{u}{R_4}\right)^{3/4}, \quad f(u) = 1 - \left(\frac{u_T}{u}\right)^3, \quad T = \frac{3u_T^{1/3}}{4\pi R_4^{3/2}}; \end{aligned} \quad (2.14)$$

在临界温度以下，可以将上述几何中的 t 与 x_4 交换角色得到如下的孤子几何

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{u}{R_4}\right)^{3/2} (-dt^2 + d\vec{x}^2 + f(u)dx_4^2) + \left(\frac{R_4}{u}\right)^{3/2} \left(\frac{du^2}{f(u)} + u^2 d\Omega_4^2\right), \\ f(u) &= 1 - \left(\frac{u_\Lambda}{u}\right)^3, \quad R_4^3 = \pi g_s N l_s^3. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Sakai-Sugimoto模型中的退禁闭相变与手征相变在[64]中有详细的讨论。在临界温度 $T_d = \frac{1}{2\pi R}$ 处，系统发生禁闭 \leftrightarrow 退禁闭的相变，相应于上述两几何背景间的转换，可以用图2.2来示意。从图中不难看出，在禁闭相中，几何背景(2.15)在 (x_4, u) 平面上的具有cigar的拓扑结构，坐标 u 的最小值取在cigar的底部 $u = u_\Lambda$ 处；为了消除在该处的坐标奇异， x_4 需要有如下的周期性

$$x_4 \sim x_4 + 2\pi R, \quad 2\pi R = \frac{4\pi R_4^{3/2}}{3u_\Lambda^{1/2}}.$$

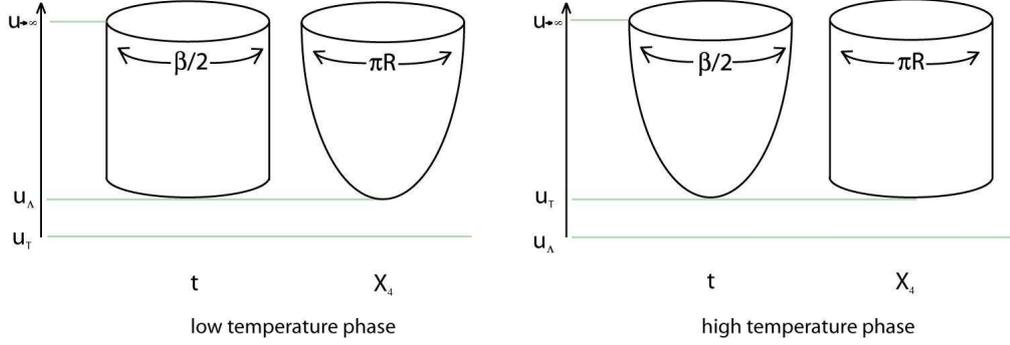


图 2.2: 在 (t, u) 和 (x_4, u) 平面上, Sakai-Sugimoto 模型在禁闭相(low temperature phase)和退禁闭相(high temperature phase)的拓扑结构示意图, 对应于 D4-brane 的两种不同几何(2.14)与(2.15)间的转变, 其中 $\beta = 1/T$ 。此图取自于[64]。

可以将 t 坐标周期化 $t \sim t + \beta$, 几何(2.15)描述的是温度低于 $T_d = 1/\beta$ 规范理论。在退禁闭相中, 将 t 与 x_4 交换角色后可有类似的分析。

由于在禁闭相中 D4-brane 的几何在 (x_4, u) 平面上具有 cigar 的拓扑结构, 味道 D8/ $\bar{D}8$ -brane 在该相中必然会连接在一起, 它几何化的说明在 Sakai-Sugimoto 模型的禁闭相中手征对称性必然破缺, 可用示意图 2.3 中的左边面板表示。示意图 2.3 的中间面板描述 Sakai-Sugimoto 模型的中间温度区域的相变情况: 退禁闭/手征对称性破缺相。示意图 2.3 的右边面板描述 Sakai-Sugimoto 模型的高温区域: 退禁闭/手征对称性恢复相。这时, 在 (x_4, u) 平面上 D8/ $\bar{D}8$ -brane 在该相中为插入 D4-brane 黑洞几何的平行的直线构型。

虽然 Sakai-Sugimoto 模型是一个很成功的全息 QCD 模型, 但是它的一个不足之处在于: 由于它根源于 10 维超引力, 对应的能谱中有 KK 模式的激发, 与已知的低能 QCD 唯象不相符。为了解决这个问题, 非临界维数时空中的超引力模型被引入到构建更实际的全息 QCD 模型中, 特别是在 6 维时空中的 AdS_6 超引力的构建[66–68]。考虑 d 维时空中只有 Dp -brane 作为源的超引力, 其作用量为

$$S = \frac{1}{2\kappa_d^2} \int d^d x \sqrt{-g} \left\{ e^{-2\Phi} \left(\mathcal{R} + 4\partial^\mu \Phi \partial_\mu \Phi + \frac{c}{\alpha'} \right) - \frac{1}{2} \sum_p |F_{p+2}|^2 \right\}, \quad (2.16)$$

$$\frac{c}{\alpha'} = \frac{10-d}{\alpha'}, \quad F_{p+2} = dC_{p+1},$$

其中, c 是非临界维数的中心荷项, C_{p+1} 是与 Dp -brane 耦合的 RR $(p+1)$ 形式场。除了由于非临界时空维数引入的中心荷外, 该作用量与求解 black p -brane 时所

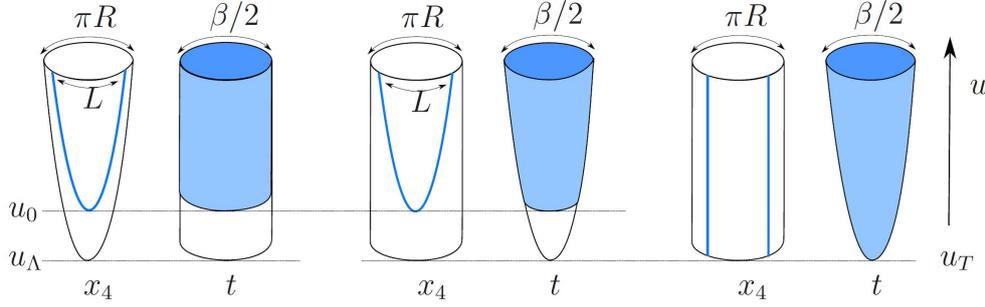


图 2.3: Sakai-Sugimoto模型在低温(左边面板)、中间温度区(中间面板)、高温区(右边面板)的相图示意。其中,黑色线条表示D4-brane的几何在 (t, u) 及 (x_4, u) 平面上的拓扑结构,蓝色线条代表D8/ $\bar{D}8$ -brane在该几何背景中嵌入构型在 (t, u) 及 (x_4, u) 平面上的拓扑结构。此图取自于[65]。

用的作用量一致。限于6维时空中D4-brane对应的超引力背景,在高温退禁闭相,可以用如下的超引力解来描述

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \left(\frac{u}{R_4}\right)^2 (-f(u)dt^2 + d\vec{x}^2 + dx_4^2) + \left(\frac{R_4}{u}\right)^2 \frac{du^2}{f(u)}, \\
 F_6 &= N \left(\frac{u}{R_4}\right)^4 dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge du \wedge dx_4, \\
 e^\Phi &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}N}, \quad R^2 = \frac{15}{2}, \quad f(u) = 1 - \left(\frac{u_T}{u}\right)^5, \quad T = \frac{5u_T}{4\pi R_4^2};
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

在低温的禁闭相,交换 t 与 x_4 的角色得到如下几何背景

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \left(\frac{u}{R_4}\right)^2 (-dt^2 + d\vec{x}^2 + f(u)dx_4^2) + \left(\frac{R_4}{u}\right)^2 \frac{du^2}{f(u)}, \\
 f(u) &= 1 - \left(\frac{u_\Lambda}{u}\right)^5, \quad x_4 \sim x_4 + 2\pi R, \quad R = \frac{2R_4^2}{5u_\Lambda}.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

为了引入基础表示物质场,可以在上述超引力中加入D4/ $\bar{D}4$ -brane,并形成如表2.3所示的构型。

本论文中将这种全息QCD模型称为非临界的Sakai-Sugimoto模型,它的相图结构与临界维数的Sakai-Sugimoto模型很相似。这两个模型的主要区别与联系总结如下[67]:

(1)非临界超引力框架下建立的模型没有相应于内部紧致空间的KK模式,

	t	x_1	x_2	x_3	x_4	u
D4	×	×	×	×	×	
D4/ $\overline{D4}$	×	×	×	×		×

表 2.3: 非临界Sakai-Sugimoto模型

使得它与低能QCD的唯象更近一步。

(2)在低能量区域($< R^{-1}$), 这个非临界维数时空中的超引力对偶于4维闵氏时空中的大 N 规范理论。而且, 与原始的AdS/CFT对应相比, 这里的't Hooft耦合参数 $\lambda \sim 1$, 不需要很大。

(3)非临界的模型中胶球质量谱与Sakai-Sugimoto模型中的结果相似, 但是胶球态 $2^{++}, 1^{++}, 0^{++}$ 在Sakai-Sugimoto模型中的简并在这个模型下被解开。

(4)在非临界超引力中, 伸缩子为常数, 使得它的对偶场论在高能区不需要像Sakai-Sugimoto模型那样要提升到M5-brane来描述。

本章中我将集中于研究全息夸克胶子等离子体在较高温度区域的一些重要信号, 因此我们期望其对偶超引力几何为渐近AdS空间的黑洞; 同时, 我们的讨论类似于热QCD中的淬火近似(quenched approximation), 即忽略味道D-brane对于原始超引力几何的影响, 这在 $N_f \ll N$ 的极限下是合理的, 关于味道D-brane反作用的影响可以参考[69]。

2.2 流体动力学与重夸克扩散

规范/引力对偶在研究强耦合的夸克胶子等离子体方面是颇有成效的, 其基本目的在于通过这一强弱对偶的数学工具来探测该系统的一些普适属性(如剪切粘滞系数与熵密度比值)以及夸克胶子等离子体的其它一些重要信号。然而文献中的研究多集中于热QCD的临界弦论对偶或是一些唯象的AdS/QCD模型。基于6维时空中 AdS_6 超引力而构建的非临界Sakai-Sugimoto模型能够很好的描述低能QCD的一些唯象, 该模型的热力学性质及相变分析在[70]有详细的讨论。这一节我将在流体动力学方面对这一模型做细致的研究, 本节可作为文献中相关研究的补充, 其主要内容主要依赖于[71]。

2.2.1 D4/ $\overline{\text{D4}}$ -brane的动力学

考虑非临界Sakai-Sugimoto模型的高温退禁闭/手征对称性恢复相，它的超引力对偶为在 AdS_6 黑洞几何(2.17)中加入以平行方式嵌入到该几何背景的D4/ $\overline{\text{D4}}$ -brane。为了以后计算的方便，将公式(2.17)中的全息坐标作替换 $u \rightarrow u_T/u$

$$ds^2 = \left(\frac{u_T}{R_4}\right)^2 \frac{1}{u^2} (-f(u)dt^2 + d\vec{x}^2 + dx_4^2) + \left(\frac{R_4}{u}\right)^2 \frac{du^2}{f(u)}, \quad (2.19)$$

$$f(u) = 1 - u^5, \quad u \in [0, 1],$$

这里， $u = 0$ 代表渐近 AdS_6 黑洞的边界， $u = 1$ 是其事件视界所在处。在手征对称性恢复相下，D4/ $\overline{\text{D4}}$ -brane在上述几何背景中的嵌入方式是平庸的，即 $dx_4/du = 0$ 。从(1.3.2)中的讨论可知，D4/ $\overline{\text{D4}}$ -brane在上述背景中的动力学由公式(1.40)和(1.41)两部分组成。在手征对称性恢复相下，Wess-Zumino部分的贡献为零，而且D4/ $\overline{\text{D4}}$ -brane的world-volume上的规范场和标量场模式是相互退耦的。如果只考虑 $U(1)$ 部分，可以将DBI部分作用量(1.40)展开到规范场和标量场涨落的二次方

$$S = S_{\text{gauge}} + S_{\text{scalar}}, \quad (2.20)$$

其中，规范场部分的作用量 S_{gauge} 为

$$S_{\text{gauge}} = -\frac{(2\pi l_s^2)^2 T_4 N_f}{4 e^\Phi} \int d^4 x du \sqrt{-\det \tilde{g}} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (2.21)$$

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha, \quad \alpha, \beta \in \{t, x_1, x_2, x_3, u\};$$

标量场部分作用量 S_{scalar} 为

$$S_{\text{scalar}} = -\frac{T_4 N_f}{2e^\Phi} \left(\frac{u_T}{R_4}\right)^2 \int d^4 x du \sqrt{-\det \tilde{g}} \frac{1}{u^2} \tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi, \quad (2.22)$$

其中， \tilde{g} 是D4/ $\overline{\text{D4}}$ -brane的world-volume上的诱导度规

$$ds^2 = \left(\frac{u_T}{R_4}\right)^2 \frac{1}{u^2} (-f(u)dt^2 + d\vec{x}^2) + \left(\frac{R_4}{u}\right)^2 \frac{du^2}{f(u)}. \quad (2.23)$$

从作用量(2.21)和(2.22)可得到规范场 $A_\alpha(x_\mu, u)$ 满足的Maxwell方程和标量场 $\varphi(x_\mu, u)$ 满足的Klein-Gordon方程如下:

$$\begin{aligned} A_\alpha(x_\mu, u) : \quad & \partial_\alpha \left(\sqrt{-\det \tilde{g}} \tilde{g}^{\alpha\gamma} \tilde{g}^{\beta\delta} F_{\gamma\delta} \right) = 0, \\ \varphi(x_\mu, u) : \quad & \partial_\alpha \left(\sqrt{-\det \tilde{g}_{\text{eff}}} \tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi \right) = 0, \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{x_\mu, u\}, \quad & \sqrt{-\det \tilde{g}_{\text{eff}}} = \sqrt{-\det \tilde{g}} \frac{1}{u^2}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

由于规范对称性, 可以选取特定的规范以减少冗余的自由度; 这里, 我们采用常用的轴规范: $A_u(x_\mu, u) = 0$ 。为了计算动量空间的格林函数, 将这些涨落模式在 x_μ 空间中做如下傅里叶变换

$$\begin{aligned} A_\mu(x_\mu, u) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} A_\mu(k_\mu, u), \\ \varphi(x_\mu, u) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} \varphi(k_\mu, u), \\ k_\mu &= (-\omega, q, 0, 0). \end{aligned} \quad (2.25)$$

上式中, 利用对偶场论的 $SO(3)$ 转动对称性, 我们不失一般性地将动量选取在 x 方向上。在动量空间, 运动方程(2.24)具有如下明显形式

$$\begin{aligned} E_T'' + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{1}{u} \right] E_T' + \frac{\tilde{\omega}^2 - \tilde{q}^2 f(u)}{f(u)^2} E_T &= 0, \\ E_L'' + \left[\frac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}^2 - \tilde{q}^2 f(u)} \frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{1}{u} \right] E_L' + \frac{\tilde{\omega}^2 - \tilde{q}^2 f(u)}{f(u)^2} E_L &= 0, \\ \varphi'' + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{5}{u} \right] \varphi' + \frac{\tilde{\omega}^2 - \tilde{q}^2 f(u)}{f(u)^2} \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

式中分别定义了横向和纵向电场强度 E_T, E_L 如下

$$E_T = E_{y,z} = \omega A_{y,z}, \quad E_L = \omega A_x + q A_t$$

而且方程中无量纲动量为

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega}{0.8\pi T}, \quad \tilde{q} = \frac{q}{0.8\pi T},$$

为了按照在(1.4.2)中描述的方案计算场论中算符的推迟格林函数, 我们需要将作用量写成公式(1.65)的形式, 这可以通过利用运动方程(2.24) 并

对(2.21)和(2.22)做分部积分得到。对于规范场部分,

$$S_{\text{gauge}} = \frac{(2\pi l_s^2)^2 T_4 N_f R_4}{2 e^\Phi} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{u} \left\{ \frac{f(u)}{\tilde{\omega}^2 - \tilde{q}^2 f(u)} E_L(-k, u) \partial_u E_L(k, u) + \frac{f(u)}{\tilde{\omega}^2} (E_y(-k, u) \partial_u E_y(k, u) + E_z(-k, u) \partial_u E_z(k, u)) \right\} \Bigg|_{u=0}^{u=1}; \quad (2.27)$$

对于标量场部分

$$S_{\text{scalar}} = -\frac{T_4 N_f u_T^6}{2 e^\Phi R_4^7} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f(u)}{u^5} \varphi(-k, u) \partial_u \varphi(k, u) \Bigg|_{u=0}^{u=1}. \quad (2.28)$$

运动方程(2.26)以及在壳作用量(2.27)和(2.28)是本节后文中相关计算的重要依据。从这些方程中不难发现, 横向电场 E_T 与标量场模式 φ 在行为上极其相似; 纵向电场模式 E_L 的行为较为复杂, 它在长波极限下的行为将直接决定轻夸克的扩散系数。下一小节中, 我们将对这些方程在流体动力学极限和高频极限下的行为做详细的解析研究, 进而抽取相关的物理量。

2.2.2 介子算符谱函数

对于一般的参数 $(\tilde{\omega}, \tilde{q})$ 而言, 运动方程(2.26)是不能够解析求解的。本小节将根据[72]中提供的流体极限展开的方法对这些方程进行求解, 得到介子谱函数在长距离、低频率下的行为; 进一步地, 在高频极限下可以应用WKB匹配的方法来研究谱函数的高能行为[73]。

考虑运动方程在(2.26)在边界 $u = 0$ 处的渐近行为。由于 $u = 0$ 是方程(2.26)的正则奇点, 按照二阶常微分方程的原理它们在该正则奇点附近分别有如下级数行为

$$\begin{aligned} E_T(k, u) &= \mathcal{A}_T(\tilde{\omega}, \tilde{q}) + \mathcal{B}_T(\tilde{\omega}, \tilde{q})u^2 + \mathcal{O}(u^3), \\ E_L(k, u) &= \mathcal{A}_L(\tilde{\omega}, \tilde{q}) + \mathcal{B}_L(\tilde{\omega}, \tilde{q})u^2 + \mathcal{O}(u^3), \\ \varphi(k, u) &= \mathcal{A}_\varphi(\tilde{\omega}, \tilde{q}) + \mathcal{B}_\varphi(\tilde{\omega}, \tilde{q})u^6 + \mathcal{O}(u^7). \end{aligned} \quad (2.29)$$

容易看出, 上式中 $\mathcal{B}_{T,L,\varphi}$ 是可归一化模式, 对应于介子算符的真空期望值, 而 $\mathcal{A}_{T,L,\varphi}$ 为不可归一化模式, 对应于该算符的源。将这些涨落模式在边界的渐近行为代入到在壳作用量(2.27)和(2.28)中并按照在(1.4.2)小节中描述的方案可知介子算符的推迟格林函数有如下形式

$$G^R(\tilde{\omega}, \tilde{q}) \sim \frac{\mathcal{B}(\tilde{\omega}, \tilde{q})}{\mathcal{A}(\tilde{\omega}, \tilde{q})}, \quad (2.30)$$

至于比例系数的具体表达式将会在后面给出。

由于 $u = 1$ 是运动方程(2.26)的另一个正则奇点，可知这些模式在视界处有如下行为

$$\{E_{T,L}(k, u), \varphi(k, u)\} \sim f(u)^{-i\tilde{\omega}/5}, \quad u \rightarrow 1, \quad (2.31)$$

这里，指数上的“-”号是为了计算推迟格林函数函数而选取的入射波边界条件。为了明显的使得这些涨落模式在黑洞视界处满足入射波的边界条件，我们做如下变换

$$E_{T,L}(k, u) = f(u)^{-i\tilde{\omega}/5} E_{T,L}(u), \quad \varphi(k, u) = f(u)^{-i\tilde{\omega}/5} \varphi(u). \quad (2.32)$$

以使这些模式在 $u = 1$ 处的奇异行为全部转移到 $f(u)$ 因子上，即 $E_{T,L}(u), \varphi(u)$ 在视界处是正规的。经过简短的代数运算可知这些新定义的模式 $E_{T,L}(u), \varphi(u)$ 满足的运动方程为

$$\begin{aligned} & E_T''(u) + \left[\frac{2i\tilde{\omega}u^4}{f(u)} + \frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{1}{u} \right] E_T'(u) \\ & + \left[\frac{4i\tilde{\omega}u^3}{f(u)} - \frac{\tilde{\omega}^2u^8 - 5i\tilde{\omega}u^8}{f^2(u)} + \left(\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{1}{u} \right) \frac{i\tilde{\omega}u^4}{f(u)} + \frac{\tilde{\omega}^2 - \tilde{q}^2f(u)}{f^2(u)} \right] E_T(u) = 0, \\ & E_L''(u) + \left[\frac{2i\tilde{\omega}u^4}{f(u)} - \frac{\tilde{\omega}^2f'(u)}{f(u)(\tilde{q}^2f(u) - \tilde{\omega}^2)} - \frac{1}{u} \right] E_L'(u) \\ & + \left[\frac{3i\tilde{\omega}u^3}{f(u)} - \frac{\tilde{\omega}^2u^8 - 5i\tilde{\omega}u^8}{f^2(u)} + \frac{i\tilde{\omega}^3u^4f'(u)}{f^2(u)(\tilde{q}^2f(u) - \tilde{\omega}^2)} + \frac{\tilde{\omega}^2 - \tilde{q}^2f(u)}{f^2(u)} \right] E_L(u) = 0, \\ & \varphi''(r) + \left(\frac{2i\tilde{\omega}r^4}{f(r)} + \frac{f'(r)}{f(r)} - \frac{5}{r} \right) \varphi'(r) \\ & + \left[\frac{4i\tilde{\omega}r^3}{f(r)} - \frac{\tilde{\omega}^2r^8 - 5i\tilde{\omega}r^8}{f^2(r)} + \left(\frac{f'(r)}{f(r)} - \frac{5}{r} \right) \frac{i\tilde{\omega}r^4}{f(r)} + \frac{\tilde{\omega}^2 - \tilde{q}^2f(r)}{f^2(r)} \right] \varphi(r) = 0. \end{aligned}$$

由于 $E_T(u)$ 与 $\varphi(u)$ 有相似的行为，在下面的分析中我们将主要考虑电场模式在流体动力学极限的行为，对于标量模式 $\varphi(u)$ ，我们将直接给出主要结果。

在长距离、低频率的极限下，有限温度的量子场论的行为可以由流体动力学来描述，因此又将这种低能极限称为流体动力学极限。在规范/引力对偶的框架下，一些大 N 场论的流体动力学行为的研究引起了广泛的关注，例如[51]。由于对偶场论的共形对称性，动量在运动方程(2.26)中以无量纲的形式 $\tilde{\omega}, \tilde{q}$ 出现。具体说来，流体动力学极限是指 $\omega \ll T, q \ll T$ 或者等价的表示

为 $\tilde{\omega} \ll 1, \tilde{q} \ll 1$ 。那么可以将 E_T 按照 $\tilde{\omega}, \tilde{q}$ 做双级数展开²,

$$E_T(u) = F_0(u) + \tilde{\omega}F_1(u) + \mathcal{O}(\tilde{\omega}^2, \tilde{q}^2). \quad (2.33)$$

将形式展开(2.33)代入 $E_T(u)$ 所满足的方程可以得到 $F_0(u)$ 和 $F_1(u)$ 满足的方程:

$$\begin{aligned} F_0''(u) + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{1}{u} \right] F_0'(u) &= 0, \\ F_1''(u) + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{1}{u} \right] F_1'(u) + \frac{2iu^4}{f(u)} F_0'(u) + \frac{3iu^3}{f(u)} F_0(u) &= 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

经过一些数学运算可得 $F_0(u) = 1$, 由于 $F_1(u)$ 的表达式过于繁杂, 这里不单独列出, 其详细形式可见[71]。在得到这两项时, 我们将 $F_0(u)$ 的归一化因子取为1, 而且将 $F_1(u)$ 中的常数项贡献吸收到 $F_0(u)$ 中去。在AdS的共形边界 $u = 0$ 处, $E_T(k, u)$ 有如下行为

$$E_T(k, u) \approx 1 + \frac{1}{2}i\tilde{\omega}u^2, \quad u \rightarrow 0. \quad (2.35)$$

在流体动力学极限下, $E_T(k, u)$ 模式的推迟格林函数为

$$\begin{aligned} G_{TT}^R(\tilde{\omega}, \tilde{q}) &= -2 \times \frac{(2\pi l_s^2)^2 T_4 N_f R_4}{2} \frac{2\mathcal{B}_T(\tilde{\omega}, \tilde{q})}{e^\Phi \tilde{\omega}^2 \mathcal{A}_T(\tilde{\omega}, \tilde{q})} \\ &= -\frac{(2\pi l_s^2)^2 T_4 N_f R_4}{e^\Phi} \frac{i}{\tilde{\omega}}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

对于 $E_L(u)$ 模式, 按照[74]中的论述我们有如下的展开方式

$$E_L(u) = G_0(u) + \tilde{\omega}G_1(u) + \frac{\tilde{q}^2}{\tilde{\omega}^2}G_2(u) + \mathcal{O}(\tilde{\omega}^2, \tilde{q}^2, \tilde{\omega}\tilde{q}). \quad (2.37)$$

与 E_T 模式的论述类似, 经过一些数学运算可以得到流体动力学极限下 $E_L(k, u)$ 在AdS边界 $u = 0$ 处的渐近行为

$$E_T(k, u) = \left(1 + i\frac{\tilde{q}^2}{2\tilde{\omega}} \right) + \frac{1}{2}i \left(\tilde{\omega} - \frac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{q}} \right) u^2 + \mathcal{O}(u^3). \quad (2.38)$$

纵向模式 $E_L(k, u)$ 的推迟格林函数为

$$\begin{aligned} G_{LL}^R(\tilde{\omega}, \tilde{q}) &= -2 \times \frac{(2\pi l_s^2)^2 T_4 N_f}{2} \frac{R_4}{e^\Phi} \frac{2\mathcal{B}_L(\tilde{\omega}, \tilde{q})}{\tilde{\omega}^2 - \tilde{q}^2 \mathcal{A}_L(\tilde{\omega}, \tilde{q})} \\ &= -\frac{(2\pi l_s^2)^2 T_4 N_f R_4}{e^\Phi} \frac{i}{\tilde{\omega} + \frac{i}{2}\tilde{q}^2}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

²我们只计算到 $\mathcal{O}(\tilde{\omega})$ 这一阶的结果, 高阶项的情形可作类似的考虑。

对于标量模式 $\varphi(u)$ ，可以做与 $E_T(u)$ 类似的分析，为了简洁起见这里不再赘述，下面将直接给出主要结果。在流体动力学极限下， $\varphi(k, u)$ 在AdS的共形边界上有如下渐近行为

$$\varphi(k, u) = 1 - \frac{1}{2}i\tilde{\omega}u^6, \quad u \rightarrow 1, \quad (2.40)$$

它的推迟格林函数为

$$G_{\varphi\varphi}^R(\tilde{\omega}, \tilde{q}) = 2 \times \frac{T_4 N_f u_T^6}{2e^\Phi} \frac{6\mathcal{B}_\varphi(\tilde{\omega}, \tilde{q})}{R_4^7 \mathcal{A}(\tilde{\omega}, \tilde{q})} = -\mathcal{N}' T^6 i\omega \quad (2.41)$$

其中，指数 \mathcal{N}' 的具体形式为

$$\mathcal{N}' = \frac{3T_4 N_f R_4^5}{e^\Phi} \left(\frac{4\pi}{5} \right)^6. \quad (2.42)$$

由场论的知识我们知道，算符的谱函数与推迟格林函数有如下关系式

$$\Re(\omega, \vec{q}) = -2\text{Im}G^R(\omega, \vec{q}).$$

利用上述公式，现将所有非零的介子谱函数列在下面

$$\begin{aligned} \Re_{tt}(\omega, q) &= 2\mathcal{N}T \frac{q^2\omega}{\omega^2 + D^2q^4}, \\ \Re_{xt}(\omega, q) &= \Re_{tx}(\omega, q) = 2\mathcal{N}T \frac{q\omega^2}{\omega^2 + D^2q^4}, \\ \Re_{xx}(\omega, q) &= 2\mathcal{N}T \frac{\omega^3}{\omega^2 + D^2q^4}, \\ \Re_{yy}(\omega, q) &= \Re_{zz}(\omega, q) = 2\mathcal{N}T\omega, \\ \Re_{\varphi\varphi}(\omega, q) &= 2\mathcal{N}'T^6\omega. \end{aligned} \quad (2.43)$$

公式中的 \mathcal{N} 和 D 为

$$\mathcal{N} = \frac{4\pi(2\pi l_s^2)^2 T_4 N_f R_4}{5e^\Phi} = \frac{3\sqrt{5}NN_f}{2\pi g_s l_s}, \quad D = \frac{1}{1.6\pi T}. \quad (2.44)$$

需要说明的是，在得到矢量介子谱函数的表达式时，我们应用了定义 $E_T \equiv E_{y,z} = \omega A_{y,z}$ 和 $E_L \equiv \omega A_x + qA_t$ 将推迟格林函数 $G_{\mu\nu}^R$ 用 G_{TT}^R 和 G_{LL}^R 表达成如下的形式

$$\begin{aligned} G_{tt}^R &= q^2 G_{LL}^R, \quad G_{xx}^R = \omega^2 G_{LL}^R, \\ G_{tx}^R &= G_{tx}^R = q\omega G_{LL}^R, \quad G_{yy}^R = G_{zz}^R = \omega^2 G_{TT}^R. \end{aligned}$$

对于 $\mathcal{N} = 4$ 超对称杨-米尔斯等离子体, 其动量和 R 荷的关联子相应的谱密度在文献[73]中做了详细的研究, 包括高频下的行为。接下来, 我将详细讨论非临界Sakai-Sugimoto模型中介子谱函数的高频行为。由于我们的讨论仅限于 $\tilde{\omega} \gg 1$, 我们可以将运动方程(2.26)中的空间动量取为零³。这样, E_T 与 E_L 这两种模式遵循相同的运动方程, 而 E_T 与 φ 行为相似, 因此, 下面的讨论主要围绕矢量模式。

为了利用WKB近似来求解运动方程(2.26), 我们需要将它们转换为薛定谔型常微分方程

$$-\psi''(\tilde{\omega}, u) + V(\tilde{\omega}, u)\psi(\tilde{\omega}, u) = 0. \quad (2.45)$$

这可以通过做如下变换得到

$$E(\tilde{\omega}, u) = \sqrt{\frac{u}{1-u^5}}\psi(\tilde{\omega}, u), \quad (2.46)$$

而且在该变换下, 有效薛定谔势能 $V(\tilde{\omega}, u)$ 为

$$V(\tilde{\omega}, u) = \frac{3 - 4u^2(9u^3 - 2u^8 + \tilde{\omega}^2)}{4u^2(1-u^5)^2}. \quad (2.47)$$

这样, 我们将问题转化为一维空间 $u \in [0, 1]$ 中能量为零的粒子在势能 $V(\tilde{\omega}, u)$ 中的定态问题。在利用WKB近似求解上述薛定谔型方程时仍然需要在黑洞视界 $u = 1$ 处对波函数取入射波边界条件, 而且这个边界条件可以通过在AdS共形边界 $u = 0$ 处选取。可以这样理解这一结论: 虽然有效薛定谔势能 $V(\tilde{\omega}, u)$ 在高频极限下为零能面下的势垒, 然而能量为零的粒子是可以自由贯穿该势垒的; 由于在区域 $[0, 1]$ 间没有有效势垒来造成黑洞视界 $u = 1$ 处入射波在共形边界 $u = 0$ 处的反射, 因此, 在视界处的入射波边界条件在 $u = 0$ 处仍然被保留。这一点也可以通过下面对这个薛定谔型方程的具体分析看出。

不难看出, 薛定谔方程(2.45)在 $[0, 1]$ 整个区域内只有两个正则奇点 $u = 0$ 和 $u = 1$, 因此, 在远离这两个正则奇点的区域可以直接写下该方程的WKB近似解; 然而, 该WKB近似解在靠近这两个奇点的区域是无意义的, 这里我们需要仔细考查方程在奇点附近的行为从而找到方程在奇点附近的渐近解。最后, 将这些渐近解与WKB近似解做匹配, 而且匹配的核心思想就是入射波边界条件可以从视界处扩展到共形边界处。

³ $\tilde{\omega} \gg 1$ 且 $\tilde{q} \gg 1$ 下关联函数的行为将在(2.4)一节中做详细的讨论。

在高频极限下, $\tilde{\omega} \gg 1$, 薛定谔方程(2.45)在远离上述两奇点的区域可有如下简化形式

$$\psi''(\tilde{\omega}, u) + \frac{\tilde{\omega}^2}{(1-u^5)^2} \psi(\tilde{\omega}, u) = 0. \quad (2.48)$$

该方程的两个WKB解如下

$$\begin{aligned} \psi_1(\tilde{\omega}, u) &= \frac{1}{\sqrt{p(u)}} \cos[s(u) + \phi_1], \\ \psi_2(\tilde{\omega}, u) &= \frac{1}{\sqrt{p(u)}} \sin[s(u) + \phi_2], \end{aligned} \quad (2.49)$$

其中, $p(u)$ 和 $s(u)$ 为

$$p(u) = \frac{\tilde{\omega}}{1-u^5}, \quad s(u) = \int_0^u \frac{\tilde{\omega} du}{1-u^5}, \quad (2.50)$$

而相位 $\phi_{1,2}$ 可以通过该WKB近似解与在奇点 $u=0$ 处的渐近解匹配得到。

在奇点 $u=0$ 处, 方程(2.45)有如下渐近行为

$$\psi'' + \left(\tilde{\omega}^2 - \frac{3}{4u^2} \right) \psi = 0, \quad (2.51)$$

该方程有一般解

$$\psi(\tilde{\omega}, u) = c_1 \sqrt{u} J_1(\tilde{\omega}u) + c_2 \sqrt{u} Y_1(\tilde{\omega}u), \quad u \rightarrow 0 \quad (2.52)$$

其中, $c_{1,2}$ 为积分常数, 将会在后面的匹配中确定。

在 $u=1$ 附近, 方程(2.45)的渐近行为如下

$$\psi''(\tilde{\omega}, u) + \frac{1/4 + \tilde{\omega}^2/25}{(1-u)^2} \psi(\tilde{\omega}, u) = 0, \quad (2.53)$$

它有如下形式的一般解

$$\psi(\tilde{\omega}, u) = c_3 (1-u)^{\frac{1}{2}-i\frac{\tilde{\omega}}{5}} + c_4 (1-u)^{\frac{1}{2}+i\frac{\tilde{\omega}}{5}}, \quad u \rightarrow 1. \quad (2.54)$$

在 $u=1$ 处的入射波要求告诉我们 $c_4=0$, 这样在黑洞视界处的渐近解简化为

$$\psi(\tilde{\omega}, u) = c_3 (1-u)^{\frac{1}{2}-i\frac{\tilde{\omega}}{5}}, \quad u \rightarrow 1. \quad (2.55)$$

利用贝塞尔函数 $J_1(x)$ 和 $Y_1(x)$ 在无穷远处的渐近行为以及 $p(u)$ 、 $s(u)$ 在 $u = 0$ 处的渐近行为，可以将WKB近似解与奇点 $u = 0$ 处的渐近解做匹配，我们得到如下关系式

$$\phi_1 = \phi_2 = -\frac{3}{4\pi}. \quad (2.56)$$

同样地，WKB近似解与奇点 $u = 0$ 处的渐近解只有在 $c_1 = ic_2$ 满足的条件下才能匹配。因此，在AdS空间的共形边界处，我们有

$$\psi(\tilde{\omega}, u) = C[\sqrt{u}J_1(\tilde{\omega}u) + i\sqrt{u}Y_1(\tilde{\omega}u)], \quad u \rightarrow 0. \quad (2.57)$$

利用变换(2.46)可知 $E(\tilde{\omega}, u)$ 在共形边界 $u = 0$ 处的展开模式中的 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 分别为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\tilde{\omega}, \tilde{q} = 0) &= -\frac{2i}{\pi\tilde{\omega}}, \\ \mathcal{B}(\tilde{\omega}, \tilde{q} = 0) &= \frac{(-i + 2i\gamma + \pi - 2i \ln 2)\tilde{\omega}}{2\pi}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

因此，矢量介子算符推迟格林函数的非零分量为

$$G_{xx}^R(\omega) = G_{yy}^R(\omega) = G_{zz}^R(\omega) = -\frac{5\pi i + (5 + 10 \ln 2 - 10\gamma)}{8\pi} \mathcal{N}\omega^2, \quad (2.59)$$

相应的谱函数为

$$\mathfrak{R}_{xx}(\omega) = \mathfrak{R}_{yy}(\omega) = \mathfrak{R}_{zz}(\omega) = \frac{5}{4} \mathcal{N}\omega^2. \quad (2.60)$$

对于标量介子算符 φ ，我们可以做类似的分析，这里为简单起见只列出相应结果。 $\varphi(\tilde{\omega}, u)$ 在AdS共形边界上有如下行为

$$\varphi(k, u) = C' \sqrt{\frac{u^5}{1-u^5}} [\sqrt{u}J_3(\tilde{\omega}u) + i\sqrt{u}Y_3(\tilde{\omega}u)]. \quad (2.61)$$

那么，标量算符的推迟格林函数和谱函数分别为

$$\begin{aligned} G_{\varphi\varphi}^R(\omega) &= -\frac{6\pi i + (11 + 12 \ln 2 - 12\gamma)}{48^2} \left(\frac{5}{4\pi}\right)^6 \mathcal{N}'\omega^6, \\ \mathfrak{R}_{\varphi\varphi}(\omega) &= \frac{15625}{786432\pi^5} \mathcal{N}'\omega^6. \end{aligned} \quad (2.62)$$

2.2.3 轻夸克扩散系数

下面我们从三种不同的角度论述如何得到轻夸克的扩散系数，同时也作为我们上述计算的一种检验。

首先，我们讨论有限温度下相对论量子场论中整体对称性对应的守恒流的推迟格林函数的一般性质，这里的内容主要依据于[74]中的相关论述。有限温度下，相对论量子场论中的Lorenz对称性破缺到时空平移对称性和空间方向上的 $SO(3)$ 转动对称性。如果在该理论中有一个守恒流 $J_\mu(x)$ ，那么推迟的流-流关联子在坐标空间中有如下定义式

$$G^R(x-y)_{\mu\nu} = -i\theta(x^0 - y^0)\langle [J_\mu(x), J_\nu(y)] \rangle, \quad (2.63)$$

公式中的 $\langle \dots \rangle$ 表示对平移不变的真空态做期望值。它在动量空间的表达式可以通过如下傅里叶变换得到

$$G_{\mu\nu}^R = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot (x-y)} G^R(k). \quad (2.64)$$

流守恒条件 $\partial_\mu J^\mu(x)$ 要求上式中的两点函数满足Ward恒等式

$$k^\mu G_{\mu\nu}^R = 0. \quad (2.65)$$

零温度情形下，Ward恒等式要求上述两点函数具有如下形式

$$G_{\mu\nu}^R(k) = P_{\mu\nu} \Pi(k^2), \quad P_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad (2.66)$$

在有限温度下，我们需要将(2.66)中的分解做如下推广

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^R(k) &= P_{\mu\nu}^T \Pi^T(k) + P_{\mu\nu}^L \Pi^L(k), \\ P_{00}^T &= 0, \quad P_{0i}^T = 0, \quad P_{ij}^T = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}, \\ P_{\mu\nu}^L &= P_{\mu\nu} - P_{\mu\nu}^T. \end{aligned} \quad (2.67)$$

我们可以不失一般性将空间动量选取在 x_1 方向上，这样流-流推迟格林函数的非零分量为

$$\begin{aligned} G_{x_2 x_2}^R(k) &= G_{x_3 x_3}^R(k) = \Pi^T(\omega, q), \quad G_{tt}^R(k) = \frac{q^2}{\omega^2 - q^2} \Pi^L(\omega, q), \\ G_{tx_1}^R(k) &= G_{x_1 t}^R(k) = \frac{-\omega q}{\omega^2 - q^2} \Pi^L(\omega, q), \quad G_{x_1 x_1}^R(k) = \frac{\omega^2}{\omega^2 - q^2} \Pi^L(\omega, q). \end{aligned} \quad (2.68)$$

根据[75]中的论述，对于处在稳定热平衡态的系统，标量函数 Π_T 和 Π_L 在低能低动量下的行为是普适的，它们由有效的流体动力学完全决定。其中，横向部

分 Π_T 在 ω 空间是非奇异的, 这是因为它与电荷密度涨落没有耦合; 然而, 涉及到电荷密度涨落的关联子必须具有流体动力学下的奇异行为, 而且它的色散关系满足 $\omega(q) \xrightarrow{q \rightarrow 0} 0$ 。具体地讲, 关联子中的纵向部分 Π_L 在 $\omega = -iDq^2$ 处有一个单极点, 而且色散关系就包括在这个单极点中, D 被习惯性的称为守恒荷的扩散系数。回到我们的计算, 在公式(2.39)中所示的纵向格林函数确实存在一个单极点

$$\tilde{\omega} = -\frac{i}{2}\tilde{q}^2, \quad (2.69)$$

恢复动量和频率的量纲得到

$$\omega = -iDq^2, \quad D = \frac{1}{1.6\pi T}. \quad (2.70)$$

这里我们将 D 解释为轻味夸克的扩散系数, 这是因为非临界Sakai-Sugimoto中引入的夸克是无质量的, 与下一小节中计算的重味夸克的扩散系数相区别。

其次, 我们可以通过膜范式(Membrane paradigm)的方式来计算扩散系数 D 。在规范/引力对偶中, 这种方法首先在[76]中用于研究流体动力学极限的各种输运系数, 之后在文献[52, 77]中做出了进一步的论证。这些研究均一致地证明了规范/引力对偶在研究强耦合系统流体动力学行为的普适特性方面的正确性, 而且这些重要的输运系数被表达为非常简洁的数学公式, 它们的具体推导可见[76]。考虑一守恒流 J_μ 的全息对偶— bulk中的规范场 A_μ , 假想其有如下形式的作用量

$$S \sim \int d^{p+2}x \sqrt{-\det g} \left(\frac{1}{g_{\text{eff}}^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (2.71)$$

这里 g_{eff} 为有效规范耦合常数。那么, 该守恒荷的扩散常数有如下普适公式

$$D = \frac{\sqrt{-\det g}}{g_{xx}g_{\text{eff}}^2\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}} \Big|_{r=r_T} \int_{r_T}^{\infty} dr \frac{-g_{tt}g_{rr}g_{\text{eff}}^2}{\sqrt{-\det g}}. \quad (2.72)$$

在应用该公式计算轻夸克的扩散系数时需要注意将上述公式中的度规视为在D4/ $\bar{D}4$ -brane的world-volume上的诱导度规(2.23), 扩散系数 D 有如下表达式

$$D = \frac{\left(\frac{u}{R}\right)^3}{\left(\frac{u}{R}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{u}{R}\right)^2 f(u) \left(\frac{R}{u}\right)^2 \frac{1}{f(u)}}} \Big|_{u=u_T} \int_{u_T}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{u}{R}\right)^3} = \frac{1}{1.6\pi T}. \quad (2.73)$$

另外一种计算输运系数的方法是利用温度场论中的Green-Kubo公式。这里, 它将味道夸克的扩散系数与电荷极化率 Ξ 通过下式联系起来

$$D\Xi = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\Re_{xx}(\omega, \mathbf{q} = 0)}{2\omega}. \quad (2.74)$$

电荷极化率 Ξ 反应电荷密度对于化学势的线性响应，可以通过引入外加电荷密度来计算。在规范/引力对偶的框架下，可以在D4/ $\overline{D}4$ -brane的world-volume上打开 $U(1)$ 规范场的时间分量 $A_t(u)$ 得到，为了保持文章的简洁性，这里直接引入我在文章[71]中给出的结果

$$\Xi = \frac{2T_4 N_f (2\pi l_s^2)^2 u_T^2}{e^\Phi R_4^3}. \quad (2.75)$$

应用公式(2.74)容易得到扩散系数 D 为

$$D = \frac{1}{\Xi} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\Re_{xx}(\omega, \mathbf{q} = 0)}{2\omega} = \frac{2T_4 N_f (2\pi l_s^2)^2 u_T^2}{e^\Phi R^3} \mathcal{N}T = \frac{1}{1.6\pi T}. \quad (2.76)$$

以上三种不同方式下得到一致的轻夸克扩散系数不仅是对我们工作的进一步检验，同时也可作为全息方法在研究强耦合场论系统具有普适性的有一个例证。

2.2.4 重夸克扩散常数

重味夸克在夸克胶子等离子体中的行为可作为另外一种探针来检测这种强耦合体系的行为。在规范/引力对偶中，重味夸克是通过开弦的终点引入的，这根开弦在AdS空间的共形边界和bulk中延展，它的行为由Nambu-Goto作用量来决定。在这个物理图景下，文献中对强耦合夸克胶子等离子体中的重味夸克的很多性质做了深入的研究，对这些内容的系统综述可参看[8]。重味夸克的扩散系数是一个重要物理量，文章[78–80]率先对相关问题作了细致的研究，本小节中我们将这些研究推广到非临界的Sakai-Sugimoto模型。可以用布朗运动来描述夸克胶子等离子体中的重味夸克，也就是说重味夸克的运动学行为犹如广义的郎之万随机运动。重味夸克的作用量可示意性的表达为如下形式

$$S[X(t)] = S_0 + \int d\tau X_\mu \mathcal{F}^\mu(\tau), \quad (2.77)$$

其中， S_0 为自由部分， \mathcal{F}^μ 是等离子体作用于重夸克的拖曳力(drag force)， X_μ 为重夸克的协变坐标。在大时间尺度上(特别是远大于关联时间 τ_c)，从上述作用量可以导出重夸克遵循的广义郎之万方程

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_0}{\delta X_i(t)} + \eta_{ij} \frac{dX_j(t)}{dt} &= \xi^i(t), \\ \langle \xi^i(t) \rangle &= 0, \quad \langle \xi^i(t) \xi^j(t') \rangle = \kappa^{ij} \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (2.78)$$

上述随机运动方程中， η^{ij} 这一项代表等离子体的阻尼作用，它与拖曳力的反对称两点关联函数直接相关； $\zeta^i(t)$ 为随机运动项，系数 κ^{ij} 由下式给出

$$\kappa^{ij} = -\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2T}{\omega} G_R^{ij}(\omega), \quad (2.79)$$

这里的 $G_R^{ij}(\omega)$ 为拖曳力 \mathcal{F}^i 的推迟格林函数。

利用规范/引力对偶计算重味夸克扩散系数的关键在于找到 \mathcal{F}^μ 的引力对偶实现。由于在规范/引力对偶中，重味夸克是由一根开弦来实现，那么可以用深入到AdS的bulk中的开弦动力学来研究拖曳力的两点函数。在静态规范下，开弦的world-sheet上坐标的选取为 $(\sigma = u, \tau = t)$ ，开弦在几何(2.19)中的嵌入方式由空间坐标 $X^i(u, t)$ 来标记。从Nambu-Goto作用量可知静态弦构型满足运动方程。考虑在该静态弦构型下沿 X_1 方向的小扰动 $X_1 \rightarrow X_1 + \zeta(u, t)$ ，开弦world-sheet上的诱导度规为

$$ds^2 = \left(\frac{u_T}{R_4}\right)^2 \frac{1}{u^2} \left(-f(u)dt^2 + \dot{\zeta}^2 dt^2 + \zeta'^2 du^2 + 2\dot{\zeta}\zeta' dt du\right) + \left(\frac{R_4}{r}\right)^2 \frac{du^2}{f(u)}.$$

将Nambu-Goto作用量展开到扰动 $\zeta(u, t)$ 的二次方

$$S_{fl} = -\frac{u_T}{4\pi l_s^2} \int dt dr \frac{1}{u^2} \left[\frac{\dot{\zeta}^2}{f(u)} - \frac{u_T^2}{R_4^4} f(u) \zeta'^2 \right]. \quad (2.80)$$

从上述作用量可知 $\zeta(u, t)$ 满足如下运动方程

$$\frac{\ddot{\zeta}(u, t)}{f(u)} - \frac{u_T^2}{R_4^4} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{f(u)}{u^2} \zeta'(u, t) \right) = 0. \quad (2.81)$$

对 $\zeta(u, t)$ 在 t 空间做傅里叶变换

$$\zeta(u, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \zeta(u, \omega). \quad (2.82)$$

在频率空间，扰动 $\zeta(u, \omega)$ 满足的运动方程为

$$\zeta''(u, \omega) + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{2}{u} \right] \zeta'(u, \omega) + \frac{\tilde{\omega}^2}{f^2(u)} \zeta(u, \omega). \quad (2.83)$$

利用运动方程可将扰动 $\zeta(u, t)$ 的作用量约化为下列表面项

$$S_{fl} = \frac{u_T^3}{4\pi l_s^2 R_4^4} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{f(u)}{u^2} \zeta(u, -\omega) \partial_u \zeta(u, \omega) \Big|_{u=0}^{u=1}, \quad (2.84)$$

在低频极限下, $\tilde{\omega} \ll 1$, 可以得到方程(2.83)的级数展开解

$$\zeta(u, \omega) = f(u)^{-i\tilde{\omega}/5} [g_0(u) + \tilde{\omega}g_1(u)], \quad (2.85)$$

其中, $g_0(u) = 1$, $g_1(u)$ 的表达式比较复杂, 具体形式在[71]中可见。在 $u = 0$ 处, $\zeta(u, \omega)$ 有如下的渐近行为

$$\zeta(u, \omega) = 1 + \frac{i}{2}\tilde{\omega}u^3, \quad (2.86)$$

那么, 拖曳力的推迟两点函数为

$$G^R(\omega) = -2 \times \frac{u_T^3}{4\pi l_s^2 R_4^4} \frac{3}{2} i\tilde{\omega} = -i \frac{12\pi R_4^2}{25l_s^2} T^2 \omega. \quad (2.87)$$

系数 κ 为

$$\kappa = -\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2T}{\omega} \text{Im}G^R(\omega) = \frac{24\pi R_4^2}{25l_s^2} T^3 \quad (2.88)$$

利用Eisntein关系式可知重夸克扩散系数 D 为

$$D \equiv \frac{2T^2}{\kappa} = \frac{l_s^2}{R_4^2} \frac{25}{12\pi} \frac{1}{T}. \quad (2.89)$$

值得指出的是, 这里利用非临界Sakai-Sugimoto模型计算的重夸克扩散系数与 $\mathcal{N} = 4$ 超对称杨-米尔斯等离子体中结果类似, 都正比于 T^{-1} 。

2.3 深度非弹性散射与结构函数

深度非弹性散射(deep inelastic scattering)在粒子物理学中占据重要地位, 它不仅证实了夸克的物理实在性, 而且证明了标准模型是物理学家们探索物质基本结构的一个正确方向。通过对这一类实验的分析可以得到如下重要结论: 强子是有内部结构的, 重子由三个夸克组成, 介子由正夸克和反夸克组成; 夸克和轻子一样是没有内部结构的, 可作为组成物质的基本单元, 而且夸克带有分数电荷。

在图2.4中, 我们示意性的描绘了这样的过程: 用一个高能电子撞击一个静态的质子得到另一个电子和一些强子。简单地讲, 这一过程是将电子加速到很高能量以后与静态的质子相互作用, 然后研究会发生什么。由于高能电子的波长比质子的尺寸小, 它可以探测到比质子尺寸更小的距离, 而且这个高能电子会破坏质子的结构, 因此这一过程是深度非弹性的, 散射以后原有质子

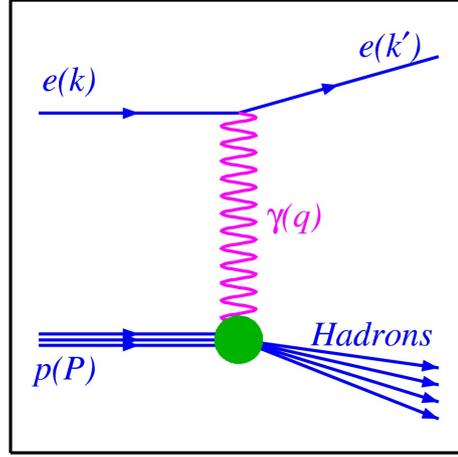


图 2.4: 高能电子被质子深度非弹性散射的过程示意图, 这里只考虑了电磁作用的贡献。

不再存在。可以从两个角度来理解这一过程的物理图景：整体上看是电子与质子的非弹性散射；局部上可以认为是电子与质子的某一个内部基本单元间的弹性散射。

微扰QCD是分析深度非弹性散射过程的重要理论工具，但是它不能够对强子的内部结构做出预言。上述散射过程振幅可以形式化地写成如下形式

$$i\mathcal{M}(ep \rightarrow ef) = (-ie)\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)\frac{-i}{q^2}ie \int d^4x e^{iq\cdot x} \langle f | J_\mu(x) | P \rangle, \quad (2.90)$$

公式中的 $\langle f |$ 表示末态强子， $|P\rangle$ 为初始质子态， $J^\mu(x)$ 为强子电磁流。由场论中的光学定理可知，振幅(2.90)的模平方与下列二阶极化张量直接相关

$$\Pi_{\mu\nu} = i \int d^4x e^{iq\cdot x} \langle P | T \{ J_\mu(x) J_\nu(0) \} | P \rangle. \quad (2.91)$$

利用场论的规范对称性可以将这个二阶张量表达成两个标量函数的组合

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{Q^2} \right) \Pi_1(x, Q^2) + \left(n_\mu - q_\mu \frac{n \cdot q}{Q^2} \right) \left(n_\nu - q_\nu \frac{n \cdot q}{Q^2} \right) \Pi_2(x, Q^2),$$

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad n_\mu = (-1, 0, 0, 0), \quad P_\mu = M n_\mu,$$

$$q_\mu = (-\omega, \vec{q}), \quad x = \frac{Q^2}{2P \cdot q}, \quad Q^2 \equiv q_\mu q^\mu,$$

其中, x 称为Bjorken标度变量, P_μ 为静止质子的协变动量, 矢量 n_μ 是质子的四维协变速度, 这里选取在质子的静止坐标系中研究这一过程。算符乘积展开可对张量 $\Pi_{\mu\nu}$ 做形式化分析。标量函数 $\Pi_{1,2}$ 直接决定了质子的结构函数,

$$F_1 \equiv \frac{1}{2\pi} \text{Im}\Pi_1, \quad F_2 \equiv \frac{-n \cdot q}{2\pi M} \text{Im}\Pi_2. \quad (2.92)$$

规范/引力对偶方案在计算如公式(2.91)所示的守恒流两点函数时是非常成功的。Hatta, Iancu和Mueller在[81]中应用全息对偶的方法研究了R荷守恒流深度非弹性地散射到强耦合区域的 $\mathcal{N} = 4$ 超对称杨-米尔斯等离子体中。在超引力近似下, 他们计算了该等离子体的结构函数, 而且发现该过程中的一个急剧转变: 能量较低时的散射较弱, 可作为准弹性处理; 在高能区, 这个守恒流被等离子体完全吸收。这个急剧转变的临界能量决定了等离子体的饱和动量。这些结果表明, 强耦合的等离子体如同强子一样可以用一个配分子的物理图景描绘, 而且所有的配分子的动量都低于这个饱和动量。

下面我将应用全息QCD模型来研究强耦合夸克胶子等离子体的内部结构问题, 计算这一系统的结构函数, 只是这里的守恒流是味道流(flavor current), 它全息对偶于味道D-brane上的 $U(1)$ 规范场。对于这种硬过程, 其核心物理量仍然是二阶极化张量 $\Pi_{\mu\nu}$, 只是需要将质子能量用等离子体的温度取代。由于两种散射过程中的靶子均处于静止状态, 这里的替代是平庸的 $M \rightarrow T$ 。这一小节的主要内容来自于已发表的工作[82]。

我们主要考虑Sakai-Sugimoto模型和它的非临界推广, 为了计算结构函数 $F_{1,2}$, 我们需要研究味道D-brane上的 $U(1)$ 规范场的动力学。对于非临界Sakai-Sugimoto模型, 相关的研究结果已经在2.2.1一节中有详细的叙述, 主要结果见方程(2.26)和(2.27); 在Sakai-Sugimoto模型中可做类似的计算, $U(1)$ 规范场的在壳作用量和动力学方程为

$$S_8 = -\mathcal{N} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sqrt{-\tilde{g}} g^{uu} \left\{ \frac{g^{tt}}{q} E_L(-k, u) a(k, u) + g^{ii} A_i(-k, u) \partial_u A_i(k, u) \right\} \Big|_{u=0}^{u=1},$$

$$\mathcal{N} = \frac{(2\pi l_s^2)^2}{2} T_8 N_f V_{S^4}, \quad \sqrt{-\tilde{g}} = \frac{R_4^{3/2} u_T^{7/2}}{g_s u^{9/2}}, \quad i = y, z;$$

$$\begin{aligned}
a'' + \left[\frac{1}{2u} + \frac{f'(u)}{f(u)} \right] a' + \left[\frac{\tilde{\omega}^2 - \tilde{q}^2 f(u)}{u f^2(u)} - \frac{f'(u)}{2u f(u)} \right] a &= 0, \\
A''_{y,z} + \left[-\frac{1}{2u} + \frac{f'(u)}{f(u)} \right] A'_{y,z} - \frac{\tilde{q}^2 f(u) - \tilde{\omega}^2}{u f^2(u)} A_{y,z} &= 0, \\
\tilde{\omega} = \frac{3\omega}{4\pi T}, \quad \tilde{q} = \frac{3q}{4\pi T}, &
\end{aligned} \tag{2.93}$$

其中, $a \equiv A'_t$, 规范不变的横向电场强度 $E_L \equiv \omega A_x + q A_t$ 与 a 有如下关系式

$$E_L = \frac{u_T u^{3/2} f(u)}{R_4^3 q} \left(\frac{a}{\sqrt{u}} \right)'.$$

为了后文中计算的方便, 我将非临界 Sakai-Sugimoto 模型中的结果列在下面

$$\begin{aligned}
S_4 &= -\mathcal{N} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{u} \left\{ -\frac{1}{q} E_L(-k, u) a(k, u) + f(u) A_i(-k, u) \partial_u A_i(k, u) \right\} \Bigg|_{u=0}^{u=1} \\
\mathcal{N} &= \frac{(2\pi l_s^2)^2 T_4 N_f u_T^2}{2 e^\Phi R_4^3}, \quad i = y, z;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a'' + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{1}{u} \right] a' + \left[\frac{1}{u^2} - \frac{f'(u)}{u f(u)} + \frac{\tilde{\omega}^2 - \tilde{q}^2 f(u)}{f^2(u)} \right] a &= 0, \\
A''_{y,z} + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{1}{u} \right] A'_{y,z} + \frac{\tilde{\omega}^2 - \tilde{q}^2 f(u)}{f^2(u)} A_{y,z} &= 0, \\
a \equiv A'_t, \quad E_L \equiv \frac{u_T^2 u f(u)}{R_4^4 q} \left(\frac{a}{u} \right)' &
\end{aligned} \tag{2.94}$$

对于深度非弹性散射过程, 转移动量的平方比靶粒子(这里为强耦合的夸克胶子等离子体系统)的特征尺度对应的能量平方大很多, 因此我们考虑如下运动学的参数空间

$$\tilde{\omega} \gg 1, \quad \tilde{q} \gg 1, \quad K^2 \equiv \tilde{q}^2 - \tilde{\omega}^2 \gg 1. \tag{2.95}$$

需要说明的是, 在上面的运动学参数空间中我们假设转移动量是类空的 $K^2 > 0$ 。然而, 正如文章[81]中指出的在高动量 $\tilde{q}^2 \gg K^2$ 极限下最终的结论也适用于类时的转移动量情形。为了应用规范/引力对偶这个工具计算等离子体的结构函数, 我们需要求解运动方程(2.93)和(2.94)。一般参数空间 $\tilde{\omega}, \tilde{q}$ 中, 这些方程是很难找到解析解的; 幸运的是, 在深度非弹性散射的参数空间(2.95), 我们可以应用一些近似方法来研究这些方程。为了达到这一目的, 我们需要将这些

运动方程作如下变换从而将它们转化为薛定谔型的方程(以Sakai-Sugimoto模型为例):

$$a = \sqrt{\frac{1}{(1-u^3)u^{1/2}}} \psi_L, \quad (2.96)$$

ψ_L 满足有效势能为 $V_L(u)$ 的定态薛定谔方程

$$-\psi_L'' + V_L(u)\psi_L = 0, \quad (2.97)$$

$$V_L(u) = \frac{1}{u(1-u^3)^2} \left[\frac{1}{16u} (-3 - 78u^3 + 45u^6) + K^2 - \tilde{q}^2 u^3 \right].$$

对于横向模式 $A_{y,z}$, 我们有类似的结果

$$-\psi_T'' + V_T(u)\psi_T = 0, \quad A_{y,z} = \sqrt{\frac{u^{1/2}}{(1-u^3)}} \psi_T, \quad (2.98)$$

$$V_T(u) = \frac{1}{u(1-u^3)^2} \left[\frac{1}{16u} (5 - 46u^3 + 5u^6) + K^2 - \tilde{q}^2 u^3 \right].$$

在参数空间(2.95)中, 有效势能 $V_{L,T}(u)$ 可简化为

$$V_L(u) = \frac{1}{u(1-u^3)^2} \left[-\frac{3}{16u} + K^2 - \tilde{q}^2 u^3 \right], \quad (2.99)$$

$$V_T(u) = \frac{1}{u(1-u^3)^2} \left[\frac{5}{16u} + K^2 - \tilde{q}^2 u^3 \right].$$

在利用WKB近似方法求解上述一维定态薛定谔问题之前, 定性的分析势能函数是很有帮助的。与[81]中的相关结果比较不难发现, 横向和纵向涨落对应的有效势能与R荷守恒流深度非弹性散射到 $\mathcal{N} = 4$ 超对称杨-米尔斯等离子体的情形非常类似。更具体的讲, 根据 \tilde{q}/K^4 的不同取值, 有效势能 $V_L(u)$ 的最大值可以为正值(对应于一个势垒)、负值(没有势垒)和零; 然而, 有效势能 $V_T(u)$ 的情形比较复杂, 在 $u = 0$ 处它趋于正的无限大, 在靠近 $u = 1$ 区域时很快衰减到负的无限大, 这使得横向模式波函数的构建较纵向模式复杂的多。当空间动量 \tilde{q} 较小时, $V_T(u)$ 中会出现一个高而窄的势垒区, 这使得视界处满足入射波的波函数不可构建, 这意味着在小能量尺度上等离子体是没有内部结构的。当考虑到非微扰的隧穿效应时, 可以论证等离子体的结构函数为一指数衰减形式[81]。因此, 我们这里的讨论限于较大动量情形 $\tilde{q}/K^4 \gg 1$ 。

按照(2.2.2)一节中研究高频极限下介子算符谱函数的方法，我们可以构建波函数 $\psi_{L,T}$ 的WKB近似解，它们在AdS共形边界 $u = 0$ 处的渐近行为如下

$$\begin{aligned}\psi_L(u \simeq 0) &= c_1 \tilde{q}^{1/4} u^{1/2} H_{1/8}^{(1)}\left(\frac{\tilde{q}u^2}{2}\right), \\ \psi_T(u \simeq 0) &= c_1^i \tilde{q}^{1/4} \sqrt{\frac{u^{3/2}}{1-u^3}} H_{3/8}^{(1)}(\tilde{q}u^2/2),\end{aligned}\quad (2.100)$$

其中， $H^{(1)}(x)$ 为第一类汉克尔函数，积分常数 c_1, c_1^i 可表达为 $A_L(u = 0) \equiv A_L(0)$ 和 $A_{y,z}(u = 0) \equiv A_i(0)$ 的函数形式。综合以上分析，在壳作用量中需要的各种模式在 $u \rightarrow 0$ 时有如下行为

$$\begin{aligned}A_L(u \simeq 0) &= c_1 \frac{u_T}{R_4^3} q^{-1} \tilde{q}^{1/4} u^{3/2} (1-u^3) \left\{ \sqrt{\frac{1}{(1-u^3)u^{1/2}}} H_{1/8}^{(1)}\left(\frac{\tilde{q}u^2}{2}\right) \right\}', \\ a(u \simeq 0) &= c_1 \tilde{q}^{1/4} \sqrt{\frac{u^{1/2}}{(1-u^3)}} H_{1/8}^{(1)}\left(\frac{\tilde{q}u^2}{2}\right), \\ A_i(u \simeq 0) &= c_1^i \tilde{q}^{1/4} \sqrt{\frac{u^{3/2}}{1-u^3}} H_{3/8}^{(1)}\left(\frac{\tilde{q}u^2}{2}\right), \\ c_1 &= \frac{-i\pi 2^{3/4} q}{\Gamma(1/8) \tilde{q}^{1/8}} \frac{R^3}{u_T} A_L(0), \quad c_1^i = \frac{i\pi \tilde{q}^{1/8}}{2^{3/4} \Gamma(3/8)} A_i(0).\end{aligned}\quad (2.101)$$

利用本节中给出的在壳作用量以及全息对偶方案，可知深度非弹性散射中的热极化张量 $\Pi_{\mu\nu}$ 的所有非零分量为

$$\begin{aligned}\text{Im}\Pi_{LL}(k, T) &= \frac{\sqrt{2}l_s}{12\Gamma^2(1/8)g_s} \lambda N_f N T \tilde{q}^{1/4}, \\ \text{Im}\Pi_{yy}(k, T) &= \text{Im}\Pi_{zz}(k, T) = \frac{\sqrt{2}\pi l_s}{54\Gamma^2(3/8)g_s} \lambda N_f N T^3 \tilde{q}^{3/4}.\end{aligned}\quad (2.102)$$

将极化张量 $\Pi_{\mu\nu}$ 定义式中的动量 q_i 选取为沿 x_1 方向，那么公式(2.92)中定义的等离子的结构函数 $F_{1,2}$ 也可以表达成如下的形式

$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{1}{2\pi} \text{Im}\Pi_{yy} = \frac{1}{2\pi} \text{Im}\Pi_{zz}, \\ F_2 &= \frac{\omega^2}{q^2} \left(\frac{Q^2 x}{\pi} \text{Im}\Pi_{LL} + 2x F_1 \right).\end{aligned}\quad (2.103)$$

因此, Sakai-Sugimoto模型所描述的强耦合夸克胶子等离子体的结构函数为

$$\begin{aligned}
F_1(k, T) &= \frac{\sqrt{2}l_s}{108\Gamma^2(3/8)g_s} \lambda N_f N T^3 \tilde{q}^{3/4} \simeq \frac{l_s}{g_s} \lambda N_f N T^3 \tilde{q}^{3/4}, \\
F_2(k, T) &= \frac{\omega^2}{q^2} \left[\frac{Q^2 x}{\pi} \frac{\sqrt{2}l_s}{12\Gamma^2(1/8)g_s} \lambda N_f N T \tilde{q}^{1/4} + 2x F_1 \right] \\
&\simeq 2x F_1
\end{aligned} \tag{2.104}$$

在得到 $F_2 \simeq 2x F_1$ 这个关系式时, 我们利用了参数空间的选取 $\tilde{q}/K^4 \gg 1$ 。为了与[81]中的结果形成对比, 我们进一步将公式(2.104)中的结构函数表达成Bjorken标度变量 x 和转移动量平方 Q^2 的函数

$$\begin{aligned}
F_1(x, Q^2) &= \frac{\sqrt{2}l_s}{108\Gamma^2(3/8)g_s} \lambda N_f N T^3 \left(\frac{3Q^2}{8\pi x T^2} \right)^{3/4} \sim \lambda N_f N T^3 \left(\frac{3Q^2}{8\pi x T^2} \right)^{3/4}, \\
F_2(x, Q^2) &\simeq 2x F_1(x, Q^2) \sim 2\lambda N_f N T^3 x \left(\frac{3Q^2}{8\pi x T^2} \right)^{3/4}.
\end{aligned}$$

对于非临界的Sakai-Sugimoto模型可以做类似的分析从而得出它所描述的夸克胶子等离子体的结构函数, 相关的详细论证过程可参考文章[82]。由WKB近似方法得到在黑洞视界 $u = 1$ 处满足入射波边界条件的各个波函数在AdS共形边界 $u = 0$ 处的行为如下

$$\begin{aligned}
A_L(u \simeq 0) &= C_1 \frac{u_T^2}{R_4^4} q^{-1} \tilde{q}^{1/7} u(1-u^5) \left\{ \sqrt{\frac{1}{1-u^5}} H_0^{(1)} \left(\frac{2}{7} \tilde{q} u^{7/2} \right) \right\}', \\
a(u \simeq 0) &= C_1 \tilde{q}^{1/7} \frac{u}{\sqrt{1-u^5}} H_0^{(1)} \left(\frac{2}{7} \tilde{q} u^{7/2} \right), \\
A_i(u \simeq 0) &= C_1^i \tilde{q}^{1/7} \frac{u}{\sqrt{1-u^5}} H_{2/7}^{(1)} \left(\frac{2}{7} \tilde{q} u^{7/2} \right), \\
C_1 &= -\frac{i\pi}{7} \frac{q}{\tilde{q}^{1/7}} \frac{R_4^4}{u_T^2} A_L(0), \quad C_1^i = \frac{i\pi \tilde{q}^{1/7}}{7^{2/7} \Gamma(2/7)} A_i(0).
\end{aligned} \tag{2.105}$$

有了这些模式在共形边界 $u = 0$ 处的渐近行为, 很容易由全息对偶方案得到该模型描述的系统的结构函数

$$\begin{aligned}
F_1(k, T) &= \frac{7\sqrt{6}RN_f N}{50\Gamma^2(2/7)g_s l_s} T^2 \left(\frac{\tilde{q}}{7} \right)^{4/7} \simeq N_f N T^2 \left(\frac{\tilde{q}}{7} \right)^{4/7}, \\
F_2(k, T) &= \frac{\omega^2}{q^2} \left[\frac{Q^2 x}{\pi} \frac{\sqrt{3}N_f N}{56\sqrt{2}\pi g_s l_s} + \frac{7\sqrt{6}RN_f N}{25\Gamma^2(2/7)g_s l_s} x T^2 \left(\frac{\tilde{q}}{7} \right)^{4/7} \right] \\
&\simeq 2x F_1(k, T).
\end{aligned}$$

用 (x, Q^2) 可将上述公式写成如下的形式

$$F_1(x, Q^2) \simeq \frac{7\sqrt{6}R_4}{50\Gamma^2(2/7)g_s l_s} N_f N T^2 \left(\frac{5Q^2}{8\pi x T^2} \right)^{4/7} \sim N_f N T^2 \left(\frac{5Q^2}{8\pi x T^2} \right)^{4/7},$$

$$F_2(x, Q^2) \simeq 2x F_1(x, Q^2) \sim 2N_f N T^2 x \left(\frac{5Q^2}{8\pi x T^2} \right)^{4/7}.$$

在结束这一小节之前，将两个全息模型下的所得结果作简单比较，同时也与[81]中的相关结果对比以探测全息方法在研究强耦合系统的一些普适性。首先，与强耦合区域的 $\mathcal{N} = 4$ 超对称杨-米尔斯等离子体的情形一样，我们在这里也得到了Callan-Gross关系式 $F_2 \simeq F_1$ 。在微扰QCD中，这个关系式的成立要求较大的Bjorken标度变量 x ，这时强子的配分子结构中占主导的是价夸克。由于全息对偶框架下的理论结构具有一般性，我们有理由相信它是全息夸克胶子等离子体的一个普适性关系式。其次，在将结构函数表达成参数 (x, Q^2) 的函数时，很容易看出结构函数的标度行为：在Sakai-Sugimoto模型中 $\sim T^3$ ，而在非临界的Sakai-Sugimoto模型中 $\sim T^2$ ；后一模型中结构函数对于温度的标度依赖行为与 $\mathcal{N} = 4$ 超对称杨-米尔斯等离子体的是一致的，这可以归结为Sakai-Sugimoto模型的非共形性的作用。最后，从结构函数的公式容易看出弦效应在这两种模型留下了印记，主要表现为 $F_{1,2}$ 对于 (g_s, l_s) 的明显依赖。这一结果似乎与直觉相悖，而且在 $\mathcal{N} = 4$ 超对称杨-米尔斯等离子体中没有出现这样的结果。

2.4 电磁信号：光子发射与电导率

探测夸克胶子等离子体中另一个重要工具是研究它的电磁信号，如光子发射率、双轻子发射率及等离子体的电导率。基于夸克胶子等离子体的微扰论处理，文章[83]计算了从夸克胶子等离子体中发射的光子谱；鉴于夸克胶子等离子体的强耦合特性，文献[84]对强耦合区域的 $\mathcal{N} = 4$ 超对称杨-米尔斯等离子体的光子发射谱、双轻子谱做了系统的研究。然而这些工作没有考虑有限密度和化学势对于这些电磁信号的影响。因此，这一节我们集中叙述重子数密度及其相应的化学势对夸克胶子等离子体中光子信号的影响，相关内容发表于[85]。

2.4.1 热场论中的光子发射

带电粒子组成的媒介物质中自发发射出的光子信号是探测该媒介物质属性的一个很好渠道，这是由于该光子能量谱依赖于该媒介系统的具体性质。对于夸克胶子等离子体，我们期望它的自发光子发射的能谱与黑体辐射的能谱分布无关。然而，实验数据表明相对论重离子碰撞试验中产生的夸克胶子等离子体是一个强耦合的系统，基于热QCD的微扰计算不再可靠。考虑一个可以用有限温度量子场论描述的热系统，假设光与该热系统中的物质有电磁相互作用，而且在拉氏量中该相互作用具有电磁流的形式 $eA_\mu J^\mu$ ，这里的 e 为电磁耦合常数。对于处于平衡态的热系统，保留到电磁耦合常数的首阶项，根据一般热场理论可知光子发射几率的微分形式为

$$d\Gamma = \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2\omega} e^2 n_B(\omega) \eta^{\mu\nu} \chi_{\mu\nu}(k)|_{\omega=|\vec{q}|}, \quad (2.106)$$

公式中的因子 $n_B = 1/(e^{\omega/T} - 1)$ 为Bose-Einstein分布因子，在壳的光子动量 $k^\mu = (\omega, \vec{q})$ 满足 $\omega = |\vec{q}|$ ， $\eta_{\mu\nu}$ 为四维闵氏时空中的度规， $\chi_{\mu\nu}$ 为电磁流的谱函数

$$\begin{aligned} \chi_{\mu\nu}(k) &= -2\text{Im}G_{\mu\nu}^R(k), \\ G_{\mu\nu}^R(k) &= \int d^4x e^{-ik \cdot x} \langle J_\mu(0) J_\nu(x) \rangle_T \theta(-t), \end{aligned} \quad (2.107)$$

上述公式中的符号 $\langle \dots \rangle_T$ 表示在热平衡态下的期望值，时空坐标的选取习惯为 $x^\mu = (t, \vec{x})$ 。交流电导率 $\sigma(\omega)$ 可以从Kubo公式得到

$$\sigma(\omega) = \frac{G_{ii}^R(\omega, \vec{q} = 0)}{i\omega}. \quad (2.108)$$

根据有限温度下的相对论量子场论的 $SO(3)$ 转动对称性和规范对称性可以将推迟格林函数 $G_{\mu\nu}^R(k)$ 按照公式(2.67)分解为横向部分和纵向部分。这样，谱函数 $\chi_{\mu\nu}$ 的迹 χ_μ^μ 为

$$\chi_\mu^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} \chi_{\mu\nu} = -4\text{Im}\Pi^T(k) - 2\text{Im}\Pi^L(k). \quad (2.109)$$

对于在壳光子的情形，公式(2.109)中只有横向部分 $\Pi^T(k)$ 有贡献，这是因为 $\Pi^L(k)|_{\omega = \vec{q} \neq 0}$ 会使得 $G_{\mu\nu}^R(k)$ 有奇异性。这一结论确保我们只需计算推迟格林函数的横向部分，使问题有所简化。总结以上论述可知，夸克胶子等离子体中光子信号的发射问题可约化为研究电磁流的两点推迟格林函数。在规范/引力对偶的框架下，可以在电磁作用较弱的情况下将场论中的电磁流 $J_\mu(x)$ 与渐近AdS时空中的规范场 $A_\alpha(u, x)$ 相对应。

2.4.2 运动方程及数值方法

由于高温时夸克胶子等离子体处于热QCD的退禁闭/手征对称性恢复相，它的全息引力对偶是一个渐近的AdS黑洞以及在这个几何背景中的一些物质场。我们形式化的标记该渐近AdS黑洞几何度规

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{uu}du^2 + g_{ij}dx^i dx^j + g_S dS^2, \quad (2.110)$$

其中， dS^2 是10维超引力几何的紧致化维度部分的度规；所有的度规分量只依赖于全息坐标 u ，而且 g_{tt} 在黑洞视界处有一单极点。而且可将黑洞视界定义在 $u = 1$ 处，那么 $u = 0$ 则是渐近AdS空间的共形边界，而且对偶的QCD理论就定义在该超平面上。此外，夸克物质部分是通过在上述几何中引入D-brane来实现的，QCD中的重子数密度及其化学势的全息对偶就是由该D-brane上的 $U(1)$ 规范场的时间分量 $A_t(u)$ 引入的。味道D-brane嵌入到几何(2.110)中的构型 $\chi(u)$ 及 $A_t(u)$ 的轮廓由D-brane的动力学完全决定⁴

$$S = -T_q N_f \int d^{q+1} x e^{-\Phi} \sqrt{-\det(g + F^0)}, \quad (2.111)$$

其中， N_f 是味道D q -brane的数目， g 是公式(2.110)在D q -brane上的诱导度规， F^0 为 $U(1)$ 规范场的场强。

考虑构型上类似于Sakai-Sugimoto模型的D4/D6模型：将10维时空中近视界极限下D4-brane对应的超引力几何沿 x_4 方向卷起来，并且对该超引力中的费米子在 x_4 维度上施以反周期性的边界条件。这样，我们得到了强耦合区域的杨-米尔斯理论的引力对偶。如果在上述超引力中引入D6-brane作为夸克部分的引力对偶，这可作为一个全息QCD模型，它在[86]中被用来研究零温下的低能QCD的有关问题。表2.4示意性的列出了该模型中各个D-brane在10维时空中的嵌入方式，

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D4	×	×	×	×	×					
D6/ $\overline{D6}$	×	×	×	×		×	×	×		

表 2.4: D4/D6模型

⁴本节研究的全息模型中Chern-Simons项对该作用量没有贡献。

不同于Sakai-Sugimoto模型，将紧致化维度部分的度规做如下参数化

$$d\Omega_4^2 = d\theta^2 + \cos^2 \theta d\Omega_2^2 + \sin^2 \theta d\xi^2,$$

D6-brane的world-volume坐标为 $(t, \vec{x}, u, \Omega_2)$ ，它的嵌入构型由函数 $\theta(u)$ 标识，这里选取 $\theta(u) = 0$ 以简化运算。这样，D6-brane的world-volume上的诱导度规为

$$ds_{\text{ind}}^2 = \left(\frac{u_T}{R_4}\right)^{3/2} u^{-3/2} (-f(u)dt^2 + d\vec{x}^2) + R^{3/2} u_T^{1/2} u^{-5/2} \frac{du^2}{f(u)} + R_4^{3/2} u_T^{1/2} u^{-1/2} d\Omega_2^2,$$

$$f(u) = 1 - u^3, \quad e^\Phi = g_s (u_T/R_4)^{3/4} u^{-3/4}.$$

$A_t(u)$ 的形状决定于下述微分方程

$$\partial_u A_0 = \sqrt{\frac{-d^2 g_{tt} g_{uu}}{g_{xx}^3 g_{\Omega_2}^2 e^{-2\Phi} + d^2}},$$

积分常数 d 是重子数密度。考虑 $U(1)$ 规范场的扰动 $A_M \rightarrow A_M + a_M$ ，其中指标 M 遍取 $(t, \vec{x}, u, \Omega_2)$ 。保留到扰动 a_M 的二阶项，可将(2.111)展开为Maxwell型作用量

$$S_{fl} = -\frac{N_f T_6}{4} \int d^4 x du d\Omega_2 e^{-\Phi} \sqrt{-\det(g_{\text{ind}} + F^0)} f_{MN} f^{MN}$$

$$\equiv -\frac{N'}{4} \int dx^4 du \sqrt{-\mathcal{G}} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}.$$
(2.112)

在上式中的第二个等式中，忽略了扰动 a_M 在 Ω_2 上的激发， $f \equiv da$ 。通过如下傅里叶变换转移到动量空间

$$a_\mu(t, \vec{x}, u) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} a_\mu(k, u; d) e^{-i\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad \vec{k} = (q, 0, 0).$$
(2.113)

那么，横向扰动模式 $a_y = a_y(k, u; d)$ 的运动方程和在壳作用量为(a_z 模式有相同的结果)

$$\partial_u^2 a_y + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{g'(u)}{2g(u)} \right] \partial_u a_y + \left[\frac{\tilde{\omega}^2}{uf(u)^2} - \frac{\tilde{q}^2}{uf(u)g(u)} \right] a_y = 0,$$

$$S_{fl} = -\frac{N'}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \sqrt{-\mathcal{G}} G^{uu} G^{yy} a_y(-k, u; d) \partial_u a_y(k, u; d) \right\} \Big|_{u=0}^{u=1},$$
(2.114)

其中，对角度规 G 为

$$G^{\mu\nu} = \text{diag} \left(\frac{g_{uu}}{g_{tt}g_{uu} + (\partial_u A_0)^2}, \frac{g_{tt}}{g_{tt}g_{uu} + (\partial_u A_0)^2}, g^{xx}, g^{yy}, g^{zz} \right);$$

无量纲的协变动量 $(\tilde{\omega}, \tilde{q}, 0, 0)$ 、重子数密度 \tilde{d} 及因子 $g(u)$ 的表达式如下

$$\tilde{\omega} = \frac{3}{4\pi T}\omega, \quad \tilde{q} = \frac{3}{4\pi T}q, \quad \tilde{d} = \left(\frac{3}{4\pi T}\right)^2 d, \quad g(u) = 1 + \tilde{d}^2 u^4.$$

按照实时间下的全息对偶方案，从 a_y 的在壳作用量可得其推迟格林函数为

$$G_{yy}^R(k) = \mathcal{N}' \frac{\sqrt{-\tilde{G}} G^{uu} G^{yy} a_y(-k, u; d) \partial_u a_y(k, u; d)}{a_y(-k, 0; d) a_y(k, 0; d)} \Big|_{u=0}, \quad (2.115)$$

上式中的 $a_y(k, u; d)$ 在黑洞视界 $u = 1$ 需满足入射波的边界条件。

对于参数 $(\tilde{\omega}, \tilde{q}, \tilde{d})$ 的一般选取，公式(2.114)中 a_y 的运动方程很难解析求解，因此，我们采用一种数值方法求解满足一定边界条件的扰动模式 a_y 。首先考察扰动模式 $a_y(k, u; d)$ 在边界 $u = 0$ 和 $u = 1$ 处的渐近行为。通过简单的Frobenius分析可知，在视界 $u = 1$ 处，

$$a_y(k, u \sim 1; d) \simeq (1 - u)^{-i\tilde{\omega}/3} [1 + a_y^{(1)}(1 - u) + a_y^{(2)}(1 - u)^2 + \dots], \quad (2.116)$$

入射波的边界条件要求我们在指数中选择“ $-$ ”，而且展开系数 $a_y^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$)由参数 $(\tilde{\omega}, \tilde{q}, \tilde{d})$ 完全确定。在共形边界 $u = 0$ 处可做类似的分析：

$$a_y(k, u \sim 0; d) \simeq a_y(k, 0; d) + u a_y^1(k, 0; d) + \dots. \quad (2.117)$$

将 $a_y(k, u; d)$ 边界展开(2.117)代入公式(2.115)可得推迟格林函数的表达式为

$$G^R(k) = \mathcal{N} \frac{a_y^1(k, 0; d)}{a_y(k, 0; d)}, \quad (2.118)$$

因子 \mathcal{N} 计量味道部分的自由度， $\mathcal{N} \sim N_f N$ 。我们将 $a_y(k, u; d)$ 在视界附近的行为视为初值，用数学软件Mathematica中的NDSolve命令对 a_y 所满足的微分方程做数值积分，从而抽取扰动 a_y 在共形边界 $u = 0$ 的行为。由于 $u = 0, 1$ 是微分方程(2.114)的两个正则奇点，在进行上述数值积分时需要将积分区间稍微偏离这两个边界。取一小量 $0 \lesssim \epsilon \ll 1$ ，我们利用视界附近的展开式得到如下初值

$$a_y(k, 1 - \epsilon; d), \quad a_y'(k, 1 - \epsilon; d);$$

在 $u = 0$ 附近我们抽取如下数值

$$a_y(k, \epsilon; d), \quad a_y^1(k, \epsilon; d).$$

在数值计算过程中，为了保证最终的物理量不依赖于截断 ϵ 的选取，我们尝试了不同的截断 ϵ 的取值直到所得结果不再变化。

为了便于比较，我们也研究了其他两个全息QCD模型：非临界的Sakai-Sugimoto模型和软墙截断的AdS/QCD模型。为了论文的完整性，在结束本小节之前我们简要的列出这两个模型下的横向扰动模式 $a_y(k, u; d)$ 的运动方程。对于非临界的Sakai-Sugimoto模型，

$$\begin{aligned} \partial_u^2 a_y + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{1}{u} + \frac{g'(u)}{2g(u)} \right] \partial_u a_y + \left[\frac{\tilde{\omega}^2}{f(u)^2} - \frac{\tilde{q}^2}{f(u)g(u)} \right] a_y &= 0, \\ f(u) = 1 - u^5, \quad g(u) = 1 + \tilde{d}^2 u^6, \\ \tilde{\omega} = \frac{5}{4\pi T} \omega, \quad \tilde{q} = \frac{5}{4\pi T} q, \quad \tilde{d} = \left(\frac{5}{4\pi T} \right)^3 d. \end{aligned} \quad (2.119)$$

对于软墙截断的AdS/QCD模型有

$$\begin{aligned} \partial_u^2 a_y + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} - c + \frac{g'(u)}{2g(u)} \right] \partial_u a_y + \left[\frac{\tilde{\omega}^2}{uf(u)^2} - \frac{\tilde{q}^2}{uf(u)g(u)} \right] a_y &= 0, \\ f(u) = 1 - u^2, \quad g(u) = 1 + \tilde{d}^2 e^{2cu} u^3, \\ \tilde{\omega} = \frac{1}{2\pi T} \omega, \quad \tilde{q} = \frac{1}{2\pi T} q, \quad \tilde{d} = \left(\frac{d}{\pi T} \right)^3, \end{aligned} \quad (2.120)$$

其中，参数 c 是与该模型的伸缩子有关的，这里我们按照文献[61]中的习惯假设线性的伸缩子 $\Phi(u) = cu$ 。在下一小节的数值结果中，我们取这一参数为 $c = 3$ 。

2.4.3 数值结果及讨论

利用上一小节中描述的数值方法，对于这些全息QCD模型我们分别计算了如下一些与电磁信号有关的物理量： χ_μ^μ/ω , $d\Gamma/d\omega$, $\text{Re}\sigma(\omega)$ 。我们将对这些数值结果做简短描述并加以比较。

图2.5描绘了各个全息QCD模型下的电磁流谱函数的迹随频率的变化行为。从图2.5中的每一幅子图中均可以看出：在低频区，增加重子数密度 \tilde{d} 会显著地增大谱函数，这与物理直觉是一致的。对于前三幅子图中 $\tilde{d} = 0$ 的曲线，它们在低频以及高频区的行为与文献[84, 87]中的解析研究的结果一致；特别地，谱函数在低频区具有线性行为。随着重子数密度从零开始增长，谱函数的这个低频

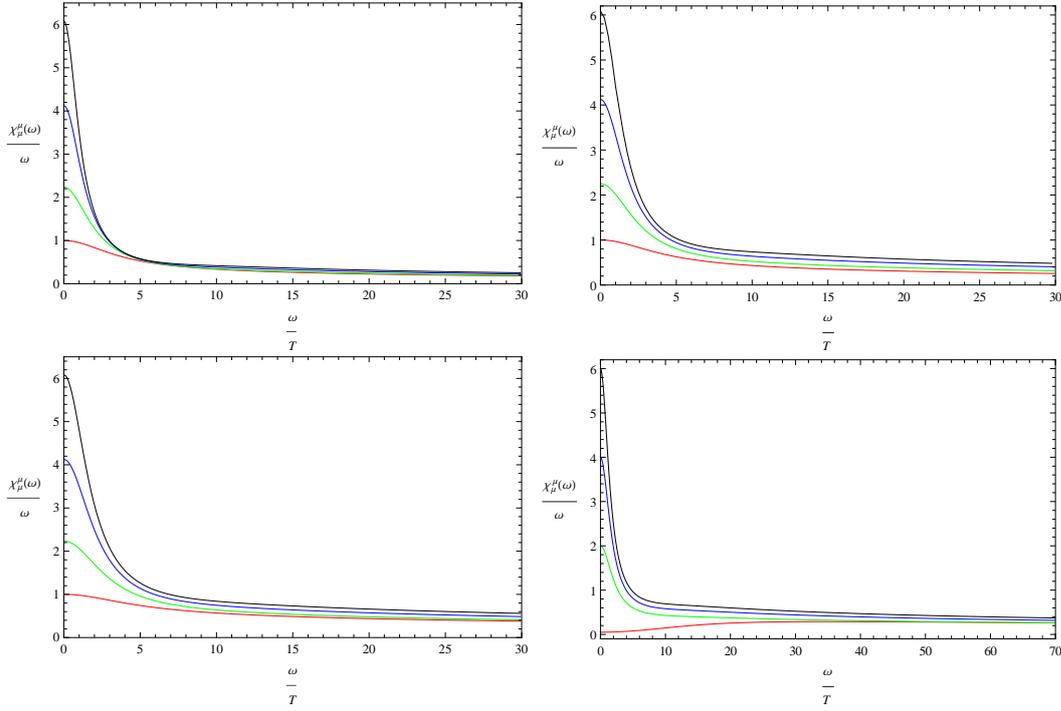


图 2.5: 归一化的类光动量下的电磁流谱函数 χ_μ^μ/ω . 不同颜色的曲线对应于不同的重子数密度: $\tilde{d}=0$ (红线), 2.0(绿线), 4.0(蓝线), 6.0(黑线). 我们按照各个子图的左右、上下方位来指代具体的图: 左上位置的图对应于D4/D6模型, 右上位置的图对应于非临界的Sakai-Sugimoto模型, 左下位置的图是最大超对称杨-米尔斯理论($c = 0$ 极限下的软墙截断的AdS/QCD模型)的结果, 右下角的图则是软墙截断的AdS/QCD模型($c=3$)下的结果.

线性去会逐渐变窄。从图2.5中位于右下角的子图可以看出, 在重子数密度为零时, 谱函数在低频区仍然有线性行为; 然而, 参数 $c \neq 0$ 引入的有效截断使得这个线性比例系数变小。这些都与[87]中的解析的解析研究是一致的。同时, 这个非平庸的参数 $c \neq 0$ 在重子数密度较小时显著改变谱函数行为, 图2.8中有详细论述。

图2.6中给出了各个全息模型下微分的光子发射率 $d\Gamma/d\omega$ 随光子能量 ω 的变化。对比不同颜色的曲线可知重子数密度会增强光子发射率, 与图2.5中所示的行为一致。对于微分的光子发射率最大处的峰值频率 ω_p , 增加重子数密度会使它向红外区移动。而且, 在光子频率低于峰值频率 ω_p 的低频区, 微分的光子发射率近似的具有线性行为。在高频区域, $d\Gamma/d\omega$ 受到Bose-Einstein因子 n_B 的支配

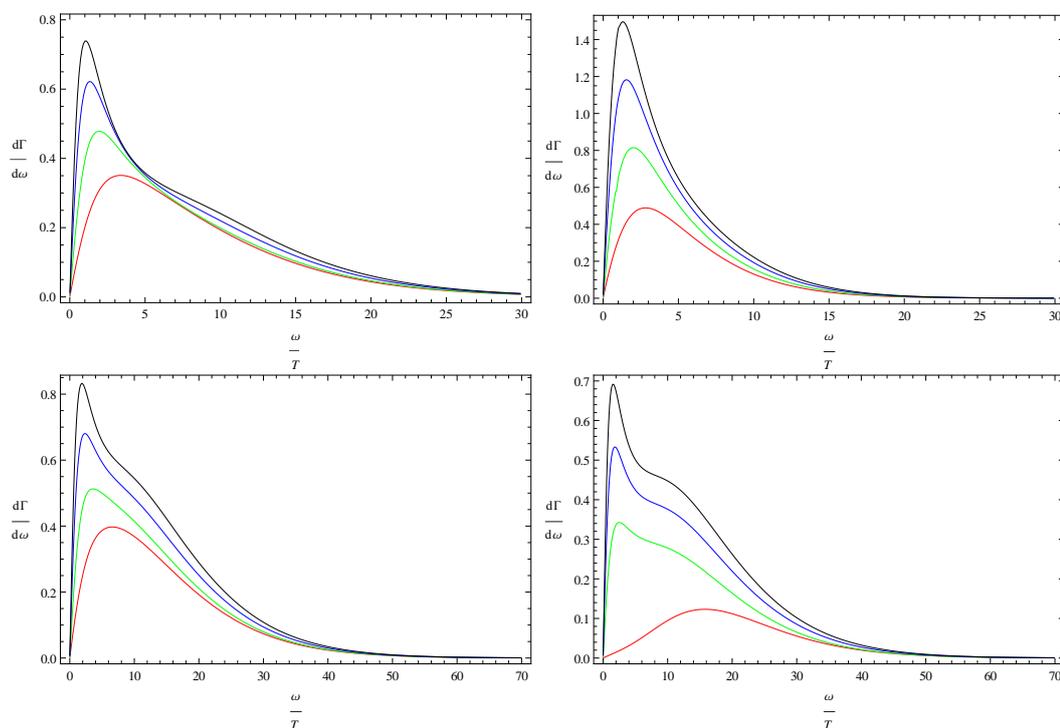


图 2.6: 光子发射率 $d\Gamma/d\omega$. 不同颜色曲线对应的重子数密度是与图2.5一致的. 各个子图对应的模型与图2.5中描述的一致.

而压低。然而，这里的光子发射率的形状与黑体辐射能谱的轮廓是不一样的，特别是在中间频率段。这说明QCD等离子体的体发射光子率与黑体辐射没有直接关联，它不仅是由热效应而引起的。

图2.7中给出了不同全息等离子体模型下的交流电导率的实部 $\text{Re}\sigma(\omega)$ 。首先考虑直流电导率 $\text{Re}\sigma(\omega)$ ：增加重子数密度能增强全息等离子体的直流电导率。在较低的重子数密度条件下(对应于前三幅子图中的红线、绿线以及最后一幅子图中的红线)， $\text{Re}\sigma(\omega)$ 在低频区是频率的单调增加函数。然而，当重子数密度足够大时， $\text{Re}\sigma(\omega)$ 随频率的变化行为比较复杂：在红外区，它首先随频率的提高而减小，然后进入到电导率的迅速增长区。电导率在高频区的线性行为是由全息对偶理论的渐近AdS特性/渐近共形性决定的。从图2.7中不同全息模型下的结果能够看出非共形性的影响：对于D4/D6模型和软墙截断的AdS/QCD模型，它们的对偶引力一方均有非平庸的伸缩子(即为前面提到的非共形特性)，相应的交流电导率实部在中间频率段存在近似的平台；这是在

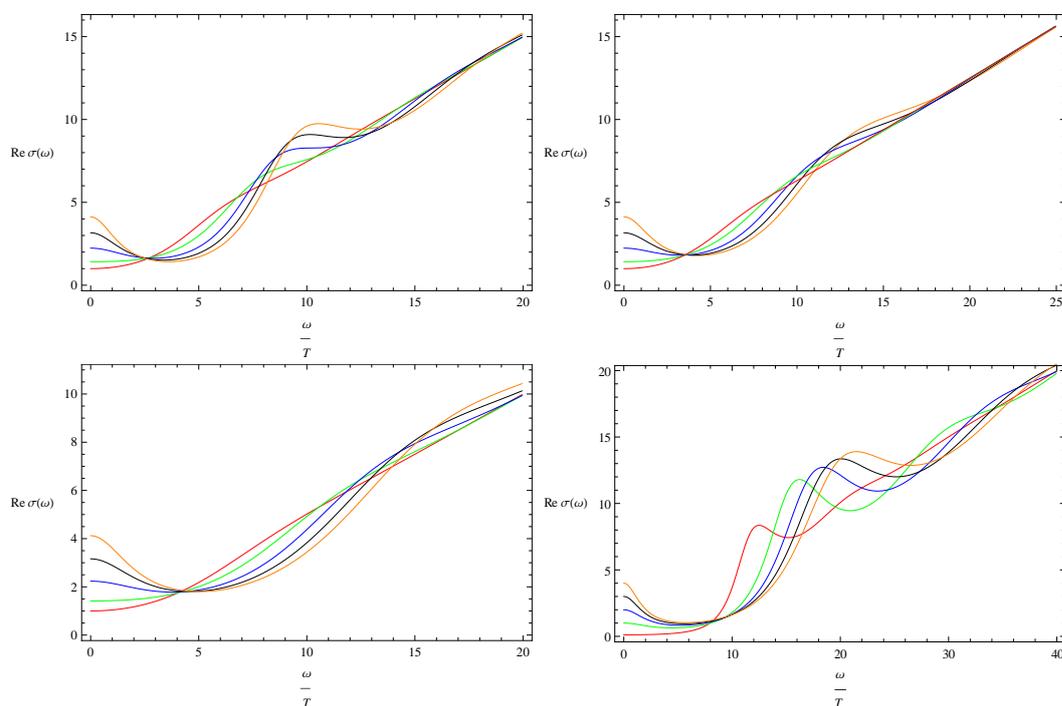


图 2.7: 交流电导率的实部 $\text{Re}\sigma(\omega)$. 不同颜色的曲线对应于不同的重子数密度: $\tilde{d}=0$ (红线), 1.0(绿线), 2.0(蓝线), 3.0(黑线), 4.0(橘黄色). 各个子图对应的模型与图2.5中描述的一致.

非临界的Sakai-Sugimoto模型和最大超对称杨-米尔斯理论中没有的。

为了探测软墙截断的AdS/QCD模型中的有效截断参数 c 的效应，我们在图2.8和2.9中重新绘画了相关物理量随频率的变化，而且限定在重子数密度较小的区域。图2.8显示：在重子数密度较低时，有效截断显著地改变谱函数在红外区的行为，它先随频率的提高而增强到某一极值后缓慢的衰减。在光子发射率的图中，第一条曲线(红线)的峰值频率超过了第二条曲线的，其它属性几乎没有变化。然而，图2.9中所示的交流电导率却与重子数密度较大情形下的结果相差较大，特别是在红外区出现一赝能带结构。这一结构在全息超导模型中出现过，与对称性的自发破缺直接对应。然而，这里的赝能带结构形成机制与全息超导模型中的是完全不一样的：在软墙截断的AdS/QCD模型中，这一结构的形成对应于它的对偶边界场论是一个禁闭的规范理论，没有自发的对称性破缺。此外，在全息超导模型中，直流电导率的实部为无限大，对应于 $\text{Re}\sigma(\omega)$ 图形中在 $\omega = 0$ 处出现一尖峰，也就是直流超导，这里的直流电导率为有限数值。

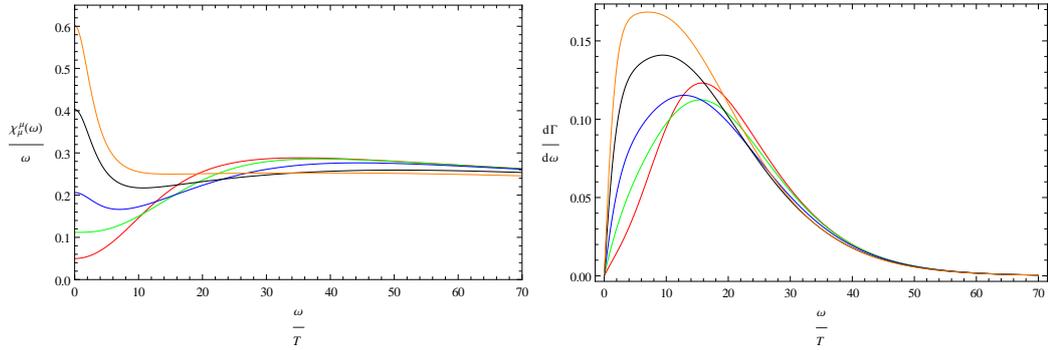


图 2.8: 软墙截断AdS/QCD模型($c=3$): 电磁流谱函数的迹 χ_μ^μ/ω 与光子发射率 $d\Gamma/d\omega$; 不同颜色的曲线对应于不同的重子数密度: $\tilde{d}=0$ (红线), 0.1(绿线), 0.2(蓝线), 0.4(黑线), 0.6(橘黄色).

可见, 有效截断直接反应在电导率中的赭能带结构。

2.5 磁场诱导的各向异性

有限密度是夸克胶子等离子体的一个重要条件, 上一节研究了有限重子数密度下的全息夸克胶子等离子体的电磁信号。从理论上讲, 很容易将这些研究推广到有限磁场的情形。实际上, 实验表明在重离子碰撞实验中确实有强磁场产生[88], 因此磁场这一要素在理解重离子物理中各种现象显得不可缺少; PHENIX合作组的近期观测表明夸克胶子等离子体具有各向异性行为[89], 而且这种各向异性行为可以在一些模型中加入磁场来解释[90]。鉴于夸克胶子等离子体的强耦合特性以及磁场的重要性, 本节应用规范/引力对偶模型来研究磁场对夸克胶子等离子体中光子信号的影响, 相关内容发表于[91]。

我们用D4/D6和D3/D7这两类交叉D-brane模型做比较研究。为了简单起见, 这里只考虑常数磁场的情形, 即在D6或者D7-brane的world-volume上的 $U(1)$ 规范场为 $A_x = By$ 且 B 为一常数。重复在2.4.2一节中的计算, 可以得到规范场的动力学方程。然而, 磁场的存在使得原有的 $SO(3)$ 转动对称性破缺到沿 z 方向的 $SO(2)$ 转动对称性, 在考查规范场动力学时需区别对待下列两种情形: $\vec{k} \parallel B$ 和 $\vec{k} \perp B$ 。对于bulk中规范场的扰动 $A_\mu \rightarrow A_\mu + a_\mu$, 其中扰动模式 a_μ 的傅里叶变换如下

$$a_\mu(t, \vec{x}, u) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} a_\mu(k, u; B) e^{-i\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad \vec{k} = (q, 0, 0) \text{ 或 } (0, 0, q).$$

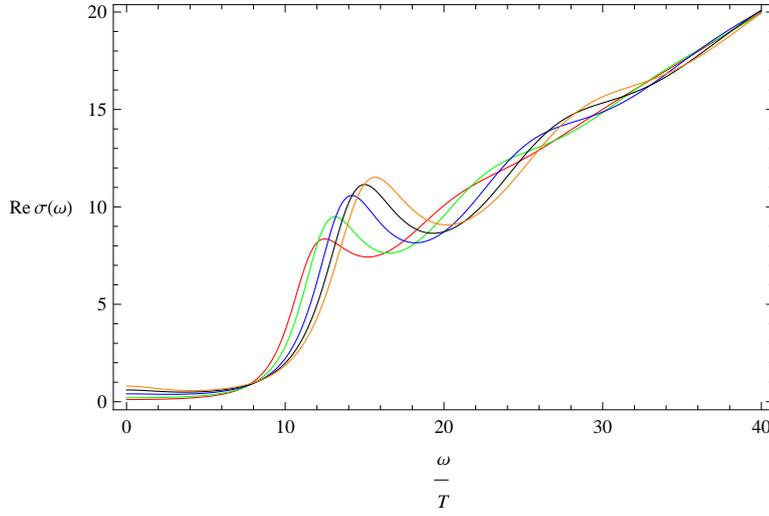


图 2.9: 软墙截断AdS/QCD模型($c=3$): 交流电导率实部 $\text{Re}\sigma(\omega)$; 不同颜色的曲线对应于不同的重子数密度: $\tilde{d}=0.1$ (红线), 0.2 (绿线), 0.4 (蓝线), 0.6 (黑线), 0.8 (橘黄色).

当 $\vec{k} = (0, 0, q)$ 时, 格林函数 $G_{\mu\nu}^R$ 仍然可以按照公式(2.67) 分解为横向部分和纵向部分, 而且在类光动量下纵向扰动模式 $a_{x,y}$ 对光子信号没有贡献。不难将2.4.2一节中的计算推广到有限磁场的情形, $a_y = a_y(k, u; B)$ 的运动方程如下(a_x 模式有同样的结果):

$$\partial_u^2 a_y + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{g'(u)}{2g(u)} \right] \partial_u a_y + \left[\frac{\tilde{\omega}^2}{uf(u)^2} - \frac{\tilde{q}^2}{uf(u)} \right] a_y = 0, \quad (2.121)$$

考虑 $\vec{k} = (q, 0, 0)$ 的情形, 虽然这种情况下的极化张量 $G_{\mu\nu}^R$ 不再能够按照公式(2.67)作形式化的分解, 但纵向模式 a_x (相对于空间动量)的扰动对光子信号仍然没有贡献。可以这样理解这一事实: 在 $B \rightarrow 0$ 这一极限下, 极化张量 $G_{\mu\nu}^R$ 仍然具有如公式(2.67)的形式, 而且在类光动量下 a_x 对该极化张量的贡献为零, 由于连续性变化磁场时我们有理由相信这一性质不改变。实际上, 利用数值方法可以证明在类光动量下 a_x 模式对 $G_{\mu\nu}^R$ 没有贡献。然而横向模式 a_y 与 a_z 满足不同的运动方程

$$\begin{aligned} \partial_u^2 a_y + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{g'(u)}{2g(u)} \right] \partial_u a_y + \left[\frac{\tilde{\omega}^2}{uf(u)^2} - \frac{\tilde{q}^2}{uf(u)g(u)} \right] a_y &= 0, \\ \partial_u^2 a_z + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{g'(u)}{2g(u)} \right] \partial_u a_z + \left[\frac{\tilde{\omega}^2}{uf(u)^2} - \frac{\tilde{q}^2}{uf(u)g(u)} \right] a_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.122)$$

在上述空间动量两种不同取向下，横向扰动模式的在壳作用量都可以写成公式(2.114)中所示的形式，只是对角度规 $G^{\mu\nu}$ 为

$$G^{\mu\nu} = \text{diag} \left(g^{tt}, \frac{g_{yy}}{g_{yy}g_{xx} + (\partial_y A_x)^2}, \frac{g_{xx}}{g_{yy}g_{xx} + (\partial_y A_x)^2}, g^{zz}, g^{uu} \right) \quad (2.123)$$

其中，这些公式中的无量纲协变动量 $(\tilde{\omega}, \tilde{q})$ 与上一节的形式相同；无量纲的磁场 \tilde{B} 和因子 $g(u)$ 定义如下

$$g(u) = 1 + \tilde{B}^2 u^3, \quad \tilde{B} = \left(\frac{R_4}{u_T} \right)^{3/2} B. \quad (2.124)$$

而且这些横向扰动模式在黑洞视界 $u = 1$ 和渐近AdS的共形边界 $u = 0$ 处的渐近行为仍如公式(2.116,2.117)。这样，推迟格林函数仍由公式(2.118)给出。只是，这些展开系数需要从运动方程(2.121)和(2.122)中求得。为了计算电导率，需要研究 $\vec{k} = 0$ 下的扰动模式；磁场的存在要求我们将电导率分为如下两种情形

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} : \partial_u^2 a_x + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{g'(u)}{2g(u)} \right] \partial_u a_x + \frac{\tilde{\omega}^2}{u f(u)^2} a_x &= 0, \\ \sigma_{zz} : \partial_u^2 a_z + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{g'(u)}{2g(u)} \right] \partial_u a_z + \frac{\tilde{\omega}^2}{u f(u)^2} a_z &= 0. \end{aligned} \quad (2.125)$$

在D3/D7模型中有关模式的扰动分析可以有相似的结果。具体说来，当 $\vec{k} = (0, 0, q)$ 时，横向扰动模式 $a_{x(y)}$ 由如下方程支配

$$\partial_u^2 a_{x(y)} + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{1}{u} - \frac{g'(u)}{2g(u)} \right] \partial_u a_{x(y)} + \left[\frac{\tilde{\omega}^2}{f(u)^2} - \frac{\tilde{q}^2}{f(u)} \right] a_{x(y)} = 0; \quad (2.126)$$

对于 $\vec{k} = (q, 0, 0)$ 的情形，横向扰动模式 a_y 与 a_z 分别满足如下运动方程

$$\begin{aligned} \partial_u^2 a_y + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{1}{u} - \frac{g'(u)}{2g(u)} \right] \partial_u a_y + \left[\frac{\tilde{\omega}^2}{f(u)^2} - \frac{\tilde{q}^2}{f(u)g(u)} \right] a_y &= 0; \\ \partial_u^2 a_z + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{1}{u} + \frac{g'(u)}{2g(u)} \right] \partial_u a_z + \left[\frac{\tilde{\omega}^2}{f(u)^2} - \frac{\tilde{q}^2}{f(u)g(u)} \right] a_z &= 0. \end{aligned} \quad (2.127)$$

用于计算交流电导率需要的运动方程为

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} : \partial_u^2 a_x + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{1}{u} - \frac{g'(u)}{2g(u)} \right] \partial_u a_x + \frac{\tilde{\omega}^2}{f(u)^2} a_x &= 0, \\ \sigma_{zz} : \partial_u^2 a_z + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{1}{u} + \frac{g'(u)}{2g(u)} \right] \partial_u a_z + \frac{\tilde{\omega}^2}{f(u)^2} a_z &= 0. \end{aligned} \quad (2.128)$$

其中，无量纲的能量与动量为 $\tilde{\omega} \equiv \omega/(4\pi T)$ ， $\tilde{q} \equiv q/(4\pi T)$ ，黑体因子 $f(u) = 1 - u^4$ ，因子 $g(u)$ 定义如下

$$g(u) = 1 + \tilde{B}^2 u^4, \quad \tilde{B} = \left(\frac{R_3}{u_T} \right)^2 B. \quad (2.129)$$

计算推迟格林函数所需的在壳作用量与D4/D6模型中的类似，这里不再赘述。

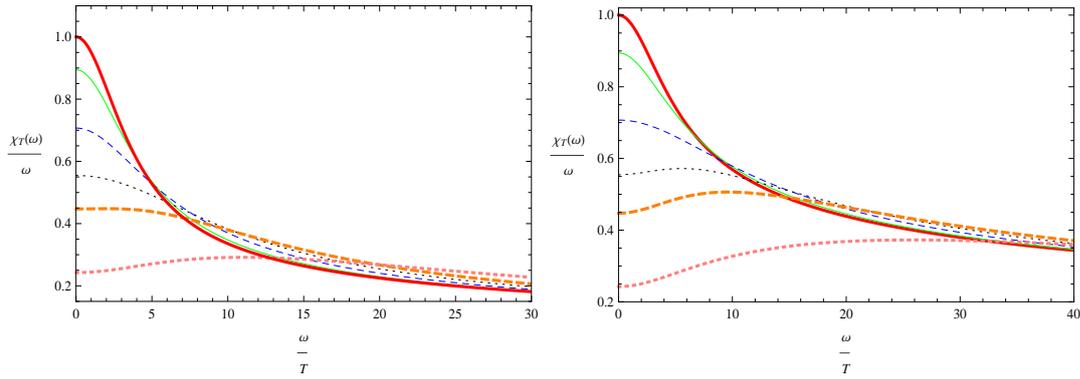


图 2.10: 类光动量下归一化的电磁流谱函数 $\chi_T(\omega)/\omega$ ，对应于 $\vec{k} \parallel B$ 的情形。不同颜色的曲线相应于不同的无量纲化的磁场强度： $\tilde{B}=0$ (红色的粗体实线)，0.5(绿色实线)，1.0(蓝色虚线)，1.5(黑色点划线)，2.0(橘黄色的粗体虚线)，4.0(粉红色的粗体点划线)。其中，左图对应于D4/D6模型下的结果，右图是D3/D7模型的结果。

作为本节的另外一部分内容，我们利用上一节叙述的数值方法计算光子信号相关的物理量。首先考虑类光动量下电磁流的谱函数，图2.10描绘了 $\vec{k} \parallel B$ 的情形下D4/D6和D3/D7这两个全息QCD模型下的归一化的电磁流谱函数的迹随频率 ω 的变化行为。由于在 $\vec{k} \parallel B$ 的情形下横向扰动的模式 a_x 与 a_y 有相同的行为，它们对谱函数的贡献是一样的，因此在图2.10中以下标 T 来标记。图2.11展示了当 $\vec{k} \perp B$ 时归一化的电磁流谱函数的迹。由于这种情况下两个横向扰动模式对谱函数的贡献不同，我们分别以 y 与 z 这两个下标来标记不同模式的贡献。在探测D-brane极限下，当磁场较小时才能忽略它对超引力背景几何的影响。因此，我们的讨论只限于低频区，这里磁场的效应才会明显的表现出来。从图2.10中的不同颜色的曲线可以看出，当从全息夸克胶子等离子体中发射的光子沿着磁场方向运动时，该磁场会显著地减弱谱函数的强度。然而当发射的光

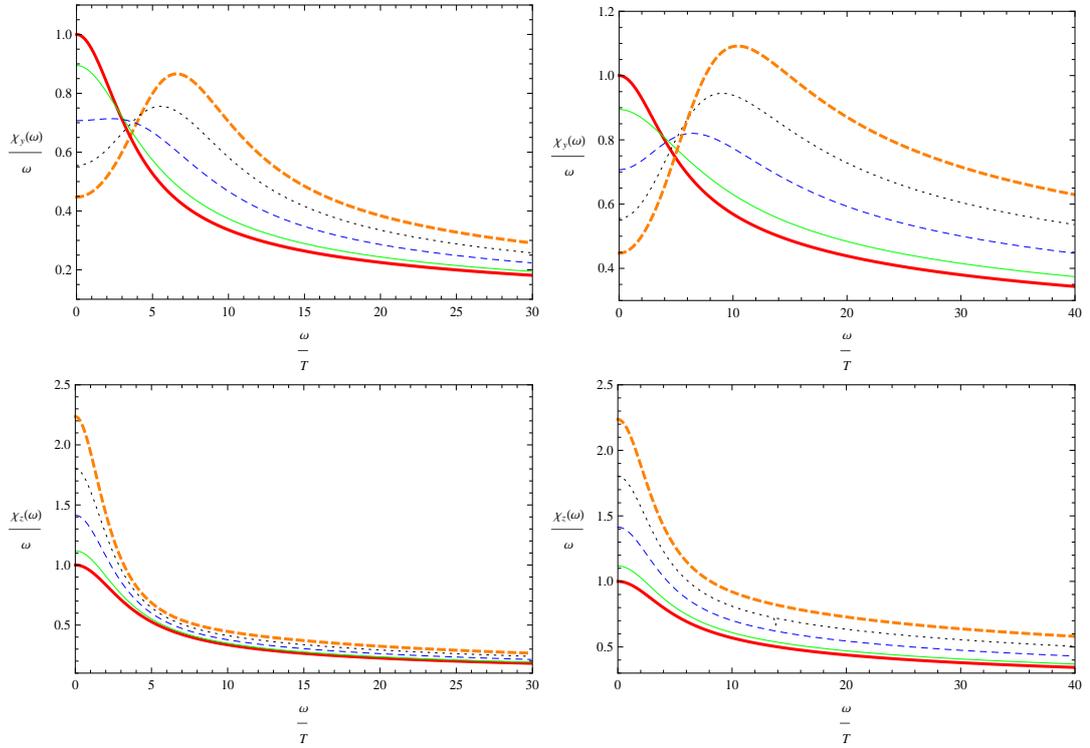


图 2.11: 类光动量下归一化的谱函数的迹 $\chi_{y,z}(\omega)/\omega$ 对应于 $\vec{k} \perp B$ 的情形。不同颜色的曲线相应于不同的无量纲化的磁场强度： $\tilde{B}=0$ (红色的粗体实线)，0.5(绿色实线)，1.0(蓝色虚线)，1.5(黑色点划线)，2.0(橘黄色的粗体虚线)，4.0(粉红色的粗体点划线)。左边的两幅子图对应于D4/D6模型的结果，右边的两幅子图是应用D3/D7模型计算得到的。图中的指标 y, z 分别对应于扰动模式 $a_{y,z}$ 对于谱函数的贡献。

子运动方向与磁场垂直时，磁场效应完全改变：从图2.11中靠下面一排的子图中可以看出增强磁场会显著地增强发射的光子的谱函数强度。根据发射光子相对于外加磁场的不同运动方向，磁场对光子的谱函数强度的增强与减弱不同可以被视为磁场在电磁信号中引入了各向异性，这在图2.12和2.13中有更明显的表现。在图2.10中，磁场的增强使得谱函数在低频区的线性行为区域变宽，这是磁场与重子数密度的另外一个区别。

图2.12和2.13描绘了归一化的微分光子发射率随频率的变化行为，它们分别对应于 $\vec{k} \perp B$ 和 $\vec{k} \parallel B$ 的两种情形，与图2.10和2.11一样我们分别用角标 T 和 y, z 来标记不同扰动模式的贡献。作为本节主要结果之一，这两张图清晰

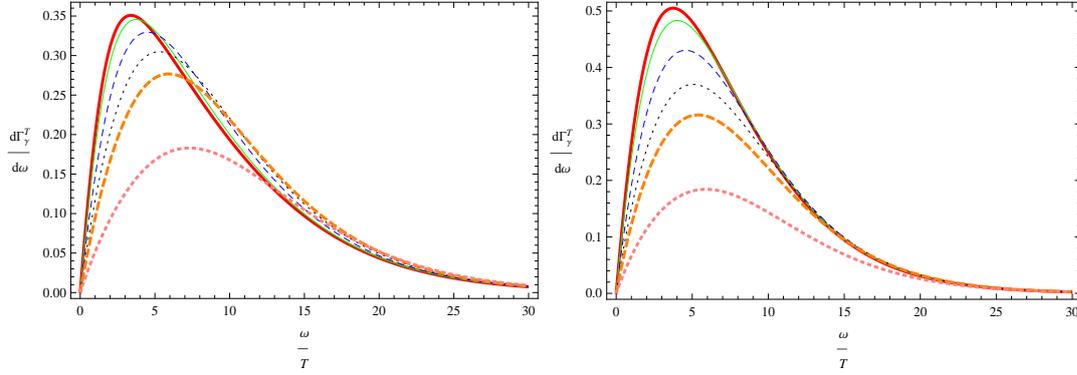


图 2.12: 归一化的光子发射率 $d\Gamma_\gamma^T/d\omega$, 对应于 $\vec{k} \perp B$ 的情形。不同颜色的曲线对应的磁场强度与图2.10中所描述的是一致的。左边的图是在D4/D7 模型下计算的结果, 而右图则对应于D3/D7模型。

地显示了磁场引入的各向异性现象：当自发发射的光子沿着外加磁场的方向运动时，增大这个磁场将使得电磁信号受到压低；若自发发射的光子运动方向与该磁场垂直时，增大磁场强度会放大这个电磁信号。另外一个特点是关于 $d\Gamma_\gamma^y/d\omega$ 的峰值频率 ω_p ：增加磁场会使得 ω_p 超紫外区移动。当然，强耦合夸克胶子等离子体中的光子自发发射能谱与黑体辐射的能谱是不同的。

图2.14是电导率实部 $\text{Re}\sigma_{xx,zz}(\omega)$ 随频率 ω 的变化图。由于在探测D-brane的方式要求磁场对超引力几何背景的反作用可以忽略，因此我们的讨论仅限于低频区。很明显，高频极限下交流电导率的行为由4维共形场论的共形不变形来决定。从图2.14中靠上面一排的两张子图不难看出，沿与磁场垂直方向的电导率会受到磁场的压制，而且当磁场达到某一临界值会在电导率的红外区中形成一gap结构，这与磁场可诱导产生gap这一期望是一致的；然而，对于沿着磁场方向的电导率，磁场的增强会相应的增加这个方向的导电能力。这是磁场诱导产生夸克胶子等离子体中有关电磁信号具有各向异性的另一明显表现。

综合本节与上一节的数值结果：磁场与重子数密度对全息夸克胶子等离子体中的电磁信号的影响是不同的。重子数密度这一要素会增强光子信号的自发发射，且不引入各向异性，这是可以从直观物理上理解的。由于磁场明显的破坏了对偶场论边的空间转动对称性，它能够在光子信号中诱导出各向异性是与物理直觉相符合的；然而，这种各向异性却反映在当自发发射的光子相对于磁场的运动方向不同时，这些电磁信号会显著地受到磁场的增强或

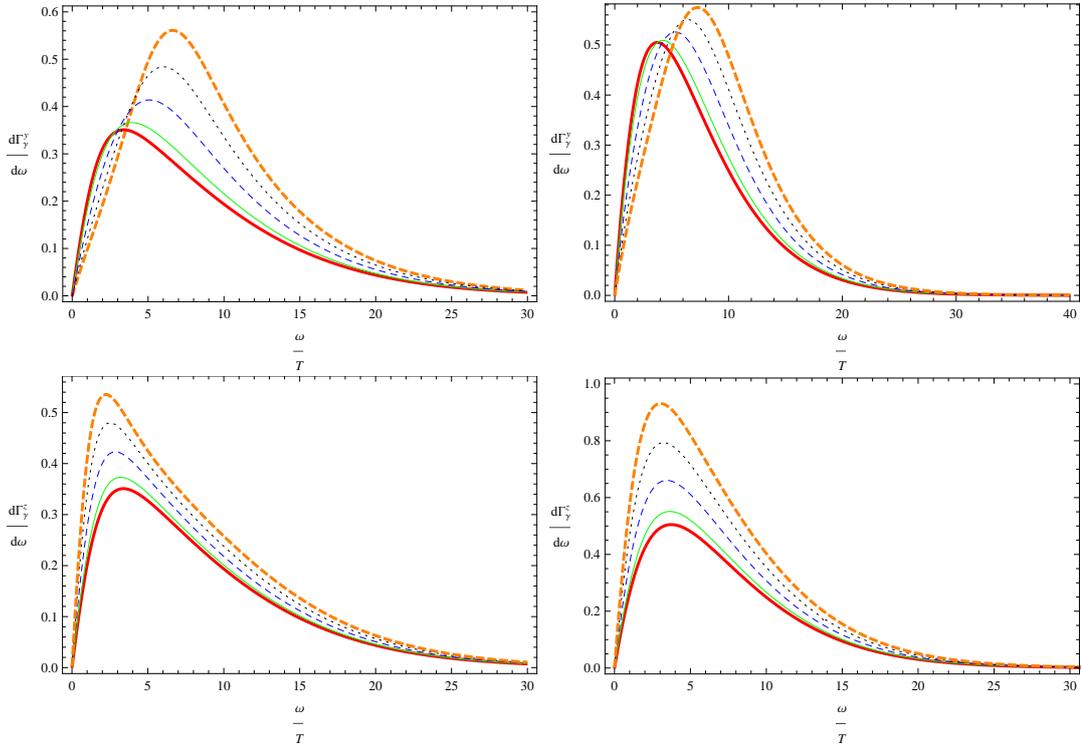


图 2.13: 归一化的光子发射率 $d\Gamma_{\gamma}^{y,z}/d\omega$, 对应于 $\vec{k} \parallel B$ 的情形不同颜色的曲线对应的磁场强度与图 2.10 中的情形一致。左边两幅子图是在 D4/D6 模型中的光子发射率, 而右边的两幅子图则对应于 D3/D7 模型。图中的指标 y, z 分别对应扰动模式 $a_{y,z}$ 对光子发射的贡献。

者减弱, 这是直观上不能够猜测的。实际上, 从各种扰动模式满足的运动方程 (2.121) 和 (2.122) 中因子 $g'(u)/(2g(u))$ 的符号可以预见在 $B \neq 0$ 时这些模式对电磁信号的贡献有本质不同。

这里, 我们应用数值方法证明了磁场对于全息夸克胶子等离子体中电磁信号的增强或者减弱效应(根据产生光子相对于外加磁场的运动方向而定)。这些数值结果是在磁较小的情况下得出的, 当磁场较大时, 我们需要考虑它对超引力几何的反作用。到目前为止, 这样的一个超引力几何度规还没有解析形式。文献 [92] 运用解析的方法研究了强耦合区域的 $\mathcal{N} = 4$ 超对称杨-米尔斯等离子体中光子发射以及双轻子发射过程, 在引入强磁场 $B \gg T^2$ 的情形下, 磁场会很大程度的增强这些电磁信号。在全息 QCD 模型下, 将 [92] 中的结果与本节内容结合起来可以更好的理解磁场在夸克胶子等离子体物理中的效应。

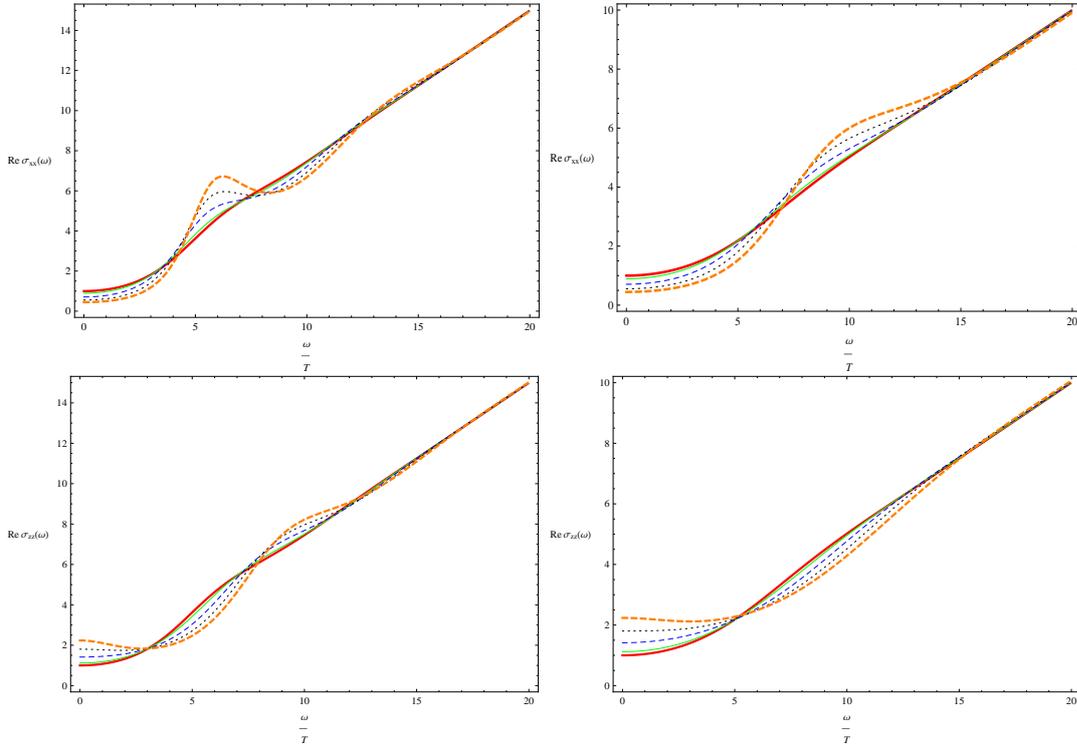


图 2.14: 交流电导率的实部 $\text{Re}\sigma_{xx(zz)}(\omega)$ 。不同颜色的曲线相应于不同的磁场强度, 相应的描述可参见图 2.11。其中, 左边的两幅子图是应用 D4/D6 模型计算而得出的结果, 右边的两幅子图则相应于 D3/D7 模型。靠上面一排的两幅子图是沿 x 方向的电导率, 靠下面的一排则是沿 z 方向的电导率。

应用 QCD 的引力对偶模型, 我们在这一章中系统研究了强耦合夸克胶子等离子体的一些重要性质。虽然这些模型大都过于简单, 与 QCD 在极端高温高密度下的行为有所区别, 然而这些研究结果表明全息方法的可用性及普适性。

第三章 化学势诱导的全息超导体

利用规范/引力对偶研究凝聚态物理学中的强关联系统是一个新兴的交叉研究方向，它将物理学的不同分支联系起来。虽然我们至今还未找到一个实际的凝聚态系统的引力对偶描述，但是应用规范/引力对偶的方法能够帮助我们理解强关联系统中的一些奇异现象，至少能够提供一些指导性的建议。本章集中讨论全息超导体的对偶引力构建及其相关性质，其核心在于如何用全息的方法实现连续对称性自发破缺，这又与黑洞的无毛定理联系在一起。

3.1 超导相变及其全息实现

超导现象是指材料在低于某一温度时，电阻变为零的现象，而这一温度称为超导转变温度 T_c 。超导现象的特征是零电阻和完全抗磁性。其中，完全抗磁性又称为Meissner效应，是指当超导体处于超导状态时，超导体内部磁场为零，对磁场完全排斥。但当外部磁场大于临界值时，超导性被破坏。超导体的这两条电磁属性可以用如下的London方程来描述

$$\frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E}, \quad \nabla \times \vec{j}_s = -\frac{n_s e^2}{mc} \vec{B}. \quad (3.1)$$

其中， \vec{j}_s 是超导电流密度， \vec{E} 和 \vec{B} 分别为超导体中的电场和磁场， e 和 m 分别是电子的电荷和质量， n_s 是超导体载流子的密度参数。在库仑规范下可以将London方程表达为超导电流与矢量势 \vec{A} 间的关系式

$$\vec{j}_s = -\frac{n_s e^2}{mc} \vec{A}. \quad (3.2)$$

对公式(3.1)中的第二个方程应用Maxwell方程可得

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B}, \quad \lambda_L \equiv \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}}. \quad (3.3)$$

其中，参数 λ_L 称为磁穿透深度，从上述方程可得磁场具有指数衰减行为 $B(x) = e^{-x/\lambda_L}$ ，这说明磁场在超导体中是被屏蔽在长度 λ_L 之内的。

超导体临界温度 T_c 附近的行为可用二级相变的Ginzburg-Landau理论来描述。虽然这个理论被认为是一个唯象理论，但是作为London方程的推广，它不仅可以推导出London方程，而且可以处理诸如空间变化的超导电子密度 n_s 或者能够改变 n_s 的非线性效应等一些超越London方程的内容。Ginzburg-Landau理论假设：在相变附近，物理系统有如下自由能

$$F = F_n + \alpha(T - T_c)|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{A}\psi \right) \right|^2 + \dots, \quad (3.4)$$

其中， F_n 是正常相的自由能， α ， β 是正的唯一参数， m 可作为有效电子质量， e 是有效电荷，而序参量 ψ 与超导电子密度通过关系式 $n_s = |\psi(x)|^2$ 联系起来。利用该唯象理论可以知道在临界温度 T_c 附近的超导体的行为完全由磁穿透深度 $\lambda_L(T)$ 和相干长度 $\xi(T)$ 决定

$$\lambda_L(T) = \sqrt{\frac{mc^2\beta}{4\pi e^2\alpha(T - T_c)}}, \quad \xi(T) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\alpha(T - T_c)}}. \quad (3.5)$$

比值 $\kappa = \lambda_L/\xi$ 称为Ginzburg-Landau参数，可用于区分第一类和第二类超导体。Abrikosov发现：参数 $\kappa > 1/2$ 的一些物质，它们在临界温度以下并不是完全的抗磁超导体，磁场并不是被这些物质完全排斥。这些物质被称为第二类超导体，以区别那些完全抗磁性的第一类超导体。

超导体的微观理论基础最先是Bardeen, Cooper和Schrieffer提出的，现在习惯称其为BCS理论。该理论认为物质中的电子-声子相互作用促使具有相反自旋方向的电子对束缚在一起形成一个带电的玻色子，又称为Cooper对。在临界温度 T_c 以下，系统发生二级相变，同时该Cooper对发生凝聚。这时，无穷大的直流电导率标志着超导性。BCS理论的一个重要结论是建立了能带的存在，它是系统基态与准粒子激发态间的能量差 ΔE 。这个能带也称为质量带，是破坏Cooper对并产生两个准粒子激发所需的最小能量。这个能带的存在为实验所证实，并且它与临界温度有典型关系式 $\Delta E = 3.5T_c$ 。进一步的研究证明，Ginzburg-Landau理论是临界温度附近的微观BCS理论的极限形式，有效电荷 e 和有效质量 m 可以等同于Cooper对的电荷与质量。而且，在相变附近，序参量 ψ 可作为Cooper对的质心运动的波函数。

虽然BCS理论能够帮助我们理解超导体的一些微观机制，它同时也预言了临界温度的上限：当温度超过39K时，Cooper对变得不稳定而无法维持超导状

态。然而，近些年的实验研究发现一些超导物质的临界温度超过了这个上限，这些物质主要是铜氧化物超导体及铁基超导体。显然，BCS理论不能用于理解这些高临界温度的超导现象。虽然有证据表明在这些高温超导物质中仍然有电子对形成，但是这个电子对的配对机制仍然不清楚。与BCS理论不同的是，这些高温超导体中电子对的配对机制涉及到强关联物理行为，这也是规范/引力对偶被用于研究高温超导的重要原因。

超流是一类没有阻力而流动的流体，它的粘滞系数为零，这一点与超导体中的零电阻率可类比。超流的一个著名例子就是处于临界温度 $T_c = 2.17K$ 之下的液氦 ^4He 。用于理解超导和超流的统一理论就是自发对称性破缺，这两种物理现象都会因生成凝聚而破坏某一对称性；它们之间的区别在于这个自发破缺的对称性是整体性的还是局部的。对于超流而言，这个自发破缺的对称性为整体对称性，因此会留下Goldstone玻色子；而在超导相变中，电磁对称性自发破缺，光子吃掉Goldstone玻色子而获得质量。

全息超导的核心思想就是在引力框架下实现超导现象中的一些关键元素。通过在渐近AdS时空中引入黑洞可将黑洞的Hawking温度等同于场论中的有限温度。超导现象中自发破缺的电磁对称性 $U(1)$ 可用bulk中规范对称性来模拟。最后，我们需要一个Cooper对来描述超导凝聚，这可以通过在bulk引入特定构型的带电标量场。然而这样的一个引力理论明显地违反了渐近平坦时空中的无毛定理。然而，渐近AdS时空犹如一个禁闭的盒子，带电粒子不能够逃逸到该空间的无穷远处。这一性质保证了渐近AdS中的黑洞几何可以有由于带电标量粒子凝聚而产生的毛[43]。文章[40]考虑了四维渐近AdS黑洞中的阿贝尔Higgs模型，

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - |\partial_\mu \Psi - iqA_\mu \Psi|^2 - V(|\Psi|) \right), \quad (3.6)$$

标量场的势能为 $V(|\Psi|) = m^2 |\Psi|^2$ 。在探测极限下，物质场对 AdS_4 黑洞几何的影响可忽略。通过规范场的时间分量 A_t 引入有限密度和化学势，不难发现电荷密度对标量场的质量平方有负值的贡献

$$m_{\text{eff}}^2 = m^2 + g^{tt} (A_t)^2 = m^2 - \frac{z^2}{f(z)} \cdot \frac{q^2}{L^2} \left(1 - \frac{z}{z_H} \right)^2. \quad (3.7)$$

当电荷 q 足够大时，在 $z \in [0, z_H]$ 区间内存在一个区域使得 m_{eff}^2 足够小而触及渐近 AdS_4 时空的Breitenlohner-Freedman下限[93]，这时阿贝尔Higgs模型进入不稳定区，标量场具有非平庸的形状，相当于黑洞有毛。换言之，当系统的温度

较高时, AdS_4 黑洞的稳定基态是无毛的, 标量场 $\Psi = 0$, 对应于超导相变中的正常相; 当系统温度降低到临界值 T_c 时, 上述系统的不稳定性要求渐近AdS黑洞出现毛, 即 $\Psi \neq 0$, 这一非平庸的带电标量场构型同时使得 $U(1)$ 对称性自发破缺。通过对该物理系统在温度降低时的基态构建及其性质的研究发现它能够很好的描述超导体。这里用于产生凝聚的是一个标量场, 因此该全息超导相变对应于 s 波。文献[94]考虑了渐近AdS黑洞中的Einstein-Yang-Mills系统, 而且在降低温度时发现了类似的行为, 由于其序参量同时破坏空间转动对称性, 该模型被称为 p 波全息超导。

虽然上述的两个最小全息引力模型可以实现类似于超导相变的自发对称性破缺, 而且其基态的一些性质能够与超导体的基本属性很好的符合, 但是这些模型归根结底是唯象的, 特别是它的对偶场论是极不明确的。这是第一章末尾所论述的规范/引力对偶中的Bottom-Up方式的一大缺点, 然而这些模型却是很有效的。鉴于这一缺点, 一些作者[95, 96]尝试从基本的超弦理论或者M理论来建立具有明确对偶场论的类超导相变; 另一种从Top-Down方式建立 p 波全息超导模型的方法是应用交叉D-brane模型并研究味道D-brane上的非阿贝尔规范场动力学, 这可以视为味超导的全息对偶实现, 有关工作可见[97–99]。这一章中, 我们主要使用唯象模型构建和交叉D-brane这两种方式研究一些全息超导体的性质。由于这些全息超导模型中为了破坏共形对称性而引入了化学势这一物理量, 为了与下一章的内容相区别, 我们在这里将这些全息超导模型笼统的称为化学势诱导的全息超导体。

3.2 一维全息超导体

规范/引力对偶在凝聚态物理学中的应用中主要集中于较高维数的时空几何, $(1+1)$ 维系统在凝聚态物理学中占有重要地位而且是近些年研究的热点问题, 因此利用全息对偶的方法构建低维凝聚态系统并对其性质做出预测是非常有意义的。利用探测D-brane的方式, 文章[100]在 $AdS_5 \times S^5$ 背景时空中引入占据其两维时空维数的D3-brane, 限制于该探测D3-brane的world-volume上可知该系统形成 $(1+1)$ 维的缺陷共形场论。该文章进一步的分析了这个交叉D-brane系统, 并完整的写下了包括四维和二维时空中自由度的拉氏量, 这个拉氏量具有 $(4, 4)$ 的超对称性和整体共形对称性, 这个模型习惯性地被称为D3/D3模型。在这一研究的基础上, 文章[101]将背景时空推广到带有黑洞的几何, 并

在探测D3-brane上给 $U(1)$ 规范场的时间分量背景值，这使得对偶的缺陷共形场论处于有限温度和有限密度的条件下，从形式上更接近凝聚态物理系统。文章[101]用这样的系统来研究 $(1+1)$ 时空中的强关联量子液体行为，并发现了与高维空间中的不同之处：该模型同时给出了无耗散的模式和纯耗散的模式。其中，无耗散的模式对应于密度扰动的极点，可理解为声模式，这与Luttinger模型的结果是一致的。然而，纯耗散的模式在Luttinger模型中没有对应，这可能是由于规范/引力对偶中的大 N 效应而引入的。同时，文章[102]采用Bottom-Up的方式研究了渐近 AdS_3 黑洞中有限温度和密度下的各种扰动模式的动力学，并发现了与[101]中相似的结论。而且，该研究还发现了无带隙模式的有限谱密度和对数周期性间的关联行为；交流电导率在 $\omega \rightarrow \infty$ 极限下趋于零，这与预期的结果是一致的。

三维bulk时空的另一个重要问题是关于手征反常的理解及其效应。在规范/引力对偶的框架下，可以用Chern-Simons项来研究与手征反常有关的物理。在凝聚态物理的应用方面，文章[103]研究了全息方法描述下的二维时空中有限密度系统的行为，利用(渐近) AdS_3 几何中的Chern-Simons项模拟守恒流的反常可以证明二维共形场论中守恒流的反常完全决定了它的关联函数。而且，该文章指出在该反常项消失的情形下这些系统的动力学会更加丰富，特别地，反常存在时没有全息超导态。文章[104]用D2/D8交叉模型构建二维QCD的全息对偶并全面的研究介子能谱，该研究强调了手征反常项在给出正确的介子质量谱中的重要作用。

Ren在[105]中应用 AdS_3/CFT_2 对偶建立了 $(1+1)$ 维时空中的类超导相变，并合理地给出了计算电磁扰动关联函数和交流电导率的方案，这一研究限制于 s 波类超导相变的情形。本节中，在这些研究的基础上我们用D3/D3模型构建 $(1+1)$ 维时空中的全息 p 波超导体并研究其基态和相关输运性质，这一研究结果发表在[106]。

考虑近视界极限下 N 张重叠在一起的D3-brane对应的超引力几何的黑洞解，为了计算的方便，将其度规中的紧致化维度部分 S^5 做如下参数化

$$d\Omega_5^2 = d\theta^2 + \cos^2 \theta d\xi^2 + \sin^2 \theta dS_3^2. \quad (3.8)$$

在该几何背景中引入两张重叠在一起的D3-brane，且让其在 (t, x^1, u, ξ) 这些方向上延展，其中 u 标记全息坐标。表3.1示意性地描述了产生背景几何的D3-brane和引入味道物质的探测D3-brane间的相互构型。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D3	×	×	×	×						
D3	×	×			×	×				

表 3.1: D3/D3模型

如果只考虑该探测D3-brane在上述超引力几何中平庸的构型将会简化计算, 那么在该探测D-brane的world-volume上的诱导度规为

$$ds^2 = \left(\frac{u_T}{R_3}\right)^2 \frac{1}{u^2} (-f(u)dt^2 + dx^2) + \frac{R_3^2}{u^2} \frac{du^2}{f(u)} + R_3^2 d\xi^2, \quad f(u) = 1 - u^4. \quad (3.9)$$

由于两张重叠的探测D3-brane上的规范对称性为 $U(2)$, 为了构建 p 波全息超导体我们只考虑 $SU(2)$ 部分的动力学, 其玻色型有效作用量在文献[17]有详细的研究。为简单起见, 我们将这个非阿贝尔的有效作用量按照弦长度平方 α' 展开保留到规范场的首阶项, 这意味着我们忽略了非线性效应的影响。对于探测D3-brane上的 $SU(2)$ 规范场部分, 其作用量简化为

$$S = -\mathcal{N}_3 \int d^3x \sqrt{-G} \text{Tr} (F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}), \quad (3.10)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

其中, \mathcal{N}_3 是一个与模型相关的常数, G 为诱导度规(3.9)的行列式, ϵ 为三阶全反对称张量且 $\epsilon^{123} = +1$ 。注意到在上述有效作用量中, 手征反常Chern-Simons项的贡献为零。一方面, 这是由于我们在探测D3-brane的超引力几何背景中的嵌入构型时考虑了零质量极限; 另一方面, 我们没有考虑规范场 A_μ^a 在紧致化的内部空间上的激发, 这在寻找能量最低的基态时是合理的。实际上, 按照文章[103]中的论述, 这一项的消失是在 $(1+1)$ 维时空中建立全息超导体所必须的。从上述作用量可得规范场 A_μ^a 的运动方程

$$\partial_\mu \left[\sqrt{-G} F^{a\mu\nu} \right] + \sqrt{-G} \epsilon^{abc} A_\mu^b F^{c\mu\nu} = 0. \quad (3.11)$$

考虑化学势诱导的全息超导相变。为了达到这个目的, 我们需要给规范场时间分量一个非平庸的背景构型, 如 $A_0^3(u) \neq 0$ 。这里, 为了保持系统空间均匀性我们要求背景规范场的各个分量只依赖于全息坐标 u 。重复Gubser在[107]中的相关讨论可以证明当化学势(由规范场时间分量的不可归一化模式提供)增大

到某一临界值时，该渐近AdS黑洞变得不稳定；而且，可以通过使规范场的某一空间分量在视界外产生凝聚而使该系统稳定下来。这样，在化学势较大的情形下bulk中的 $SU(2)$ 规范对称性自发破缺，黑洞产生超导性。具体说来，对于规范场我们取如下假设

$$A = A_0^3 \tau^3 dt + A_1^1 \tau^1 dx \quad (3.12)$$

从后面的论述中可以看到，较大的化学势对应着系统处于较低温度状态，因此规范场分量 A_1^1 非平庸的解是临界温度之下的系统的基态，即超导态。

在陈述相关数值结果之前，简单的总结一下从场论中对于上述基态的理解。由于D3/D3模型中的对偶场论是明确知道的，我们可以按照[98]中的论述写下临界温度以下场论这边的凝聚算符。分量 $A_0^3(u)$ 在渐近AdS时空的共形边界处的渐近展开中，其不可归一化的模式可理解为同位旋化学势，在对偶场论中为具有如下形式算符提供源

$$J_0^3 \propto \bar{\psi} \sigma^3 \gamma_0 \psi + \phi \sigma^3 \partial_0 \phi, \quad (3.13)$$

其中， $\psi = (\psi_u, \psi_d)$ 和 $\phi = (\phi_u, \phi_d)$ 分别是夸克场与标夸克场， σ^i 为Pauli矩阵， γ_μ 为二维时空中的Dirac矩阵。按照同样的方式，对偶于 A_1^1 的凝聚算符具有如下的形式

$$J_1^1 \propto \bar{\psi} \sigma^1 \gamma_1 \psi + \phi \sigma^1 \partial_1 \phi. \quad (3.14)$$

这里，对称性破缺的样式可以按照下面的方式理解。 $A_0^3(u)$ 在共形边界 $u = 0$ 处的非零值使得bulk中的 $SU(2)$ 规范对称性明显破缺到它的 $U(1)$ 子群，它是由 $SU(2)$ 颜色空间的12-平面上的转动生成的；在电磁作用较弱的情况下，可以将bulk中的这个 $U(1)$ 对称性等同于电磁规范对称性。该 $U(1)$ 对称性的破缺是通过通过对偶于 A_1^1 分量的算符 \mathcal{O} 获得真空期望值而实现，而且为了确保它是自发破缺的，我们要求算符 \mathcal{O} 的源为零。这就是前面提到的对称性自发破缺的全息实现。通过从对偶场论中的这些论述可见，这一自发对称性破缺导致的矢量算符凝聚的过程类似于QCD中的 ρ 介子凝聚，因此这种全息超导模型也称为味超导，与色超导态在本质上是不同的。

在由公式(3.12)给出的背景场假设下，杨-米尔斯方程(3.11)有如下分量的形式

$$\begin{cases} \phi'' + \frac{1}{u} \phi' - \frac{1}{f(u)} \varphi^2 \phi = 0, \\ \varphi'' + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{1}{u} \right] \varphi' + \frac{1}{f^2(u)} \phi^2 \varphi = 0, \end{cases} \quad (3.15)$$

其中，方程中的'代表对坐标 u 的导数，模式 φ 和 ϕ 由下式定义

$$\phi \equiv \frac{A_0^3}{\pi T}, \quad \varphi \equiv \frac{A_1^1}{\pi T}.$$

由于模式 φ 与 ϕ 的非线性耦合，上述微分方程组(3.15)在一般情况下是很难解析求解的，因此我们采用数值方法找到满足一定条件的 (φ, ϕ) 组合。在数值求解该方程组之前，需要先研究模式 φ, ϕ 在共形边界 $u = 0$ 和黑洞视界 $u = 1$ 处的行为。利用Frobenius方法可知在共形边界处，

$$\phi(u \rightarrow 0) \sim \rho + \mu \log u, \quad \varphi(u \rightarrow 0) \sim \varphi^{(1)} + \varphi^{(0)} \log u + \dots \quad (3.16)$$

与高维bulk情形不同的是，模式 φ, ϕ 在共形边界 $u = 1$ 处行为中出现对数项，因此我们在建立边界场论与bulk引力中相关物理量的对应时需重新考虑。按照bulk中的场在共形边界的渐近行为中的可归一化模式对应它的对偶算符的真空期望值而它的不可归一化模式对应于算符的源这一原则，我们将上述渐近边界展开中的系数 μ 解释为化学势， ρ 为密度；对于 φ 模式可以有相似的结果， $\varphi^{(0)}$ 是凝聚算符 \mathcal{O} 的源， $\varphi^{(1)}$ 与该凝聚算符的真空期望值对应。超导中对称性的自发破缺要求模式 φ 满足如下条件

$$\varphi^{(0)} = 0, \quad \varphi^{(1)} \sim \langle \mathcal{O} \rangle. \quad (3.17)$$

在黑洞视界处， ϕ 和 φ 有如下级数行为

$$\begin{aligned} \phi(u \sim 1) &= a_1(u-1) + b_1(u-1)^2 + c_1(u-1)^3 + d_1(u-1)^4 + \dots, \\ \varphi(u \sim 1) &= a_2 + b_2(u-1) + c_2(u-1)^2 + d_2(u-1)^3 + e_2(u-1)^4 + \dots, \end{aligned} \quad (3.18)$$

其中，展开系数 $a_{1,2}$ 是自由的，其余的系数可以通过将上述视界处行为代入到耦合方程组(3.15)中并匹配 $(u-1)$ 的各级系数而表达成 $a_{1,2}$ 的函数。同时，为了使得规范场的时间分量 ϕ 的模平方在视界处有限我们要求 $\phi(u=1) = 0$ 。以(3.18)为初始条件，可以用有限元微分方程求解方法得到方程组(3.15)满足边界条件(3.17)的解。

图3.1描绘了凝聚算符 \mathcal{O} 在临界温度 T_c 以下的行为。从该图中描绘的凝聚曲线可知它与高维时空中全息超导的相关性质类似。在温度 $T \rightarrow 0$ 时，凝聚算符的期望值 \mathcal{O} 趋于常数，这正是一般超导体所期望的。然而，零温极限下凝聚的真空期望值 $\langle \mathcal{O} \rangle \approx 8.5T_c$ 比BCS理论的预言值大很多，这可能是由于全息超导

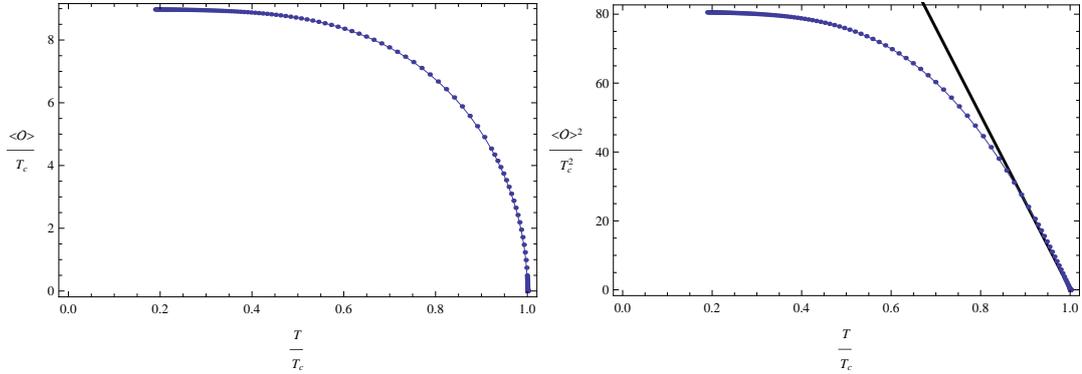


图 3.1: $(1+1)$ 维时空中 p 波全息超导体的凝聚算符 \mathcal{O} 的真空期望值, 当 T 趋于临界温度时, 凝聚逐渐消失。右图中的黑色直线是拟合 \mathcal{O} 在临界温度附近的数据为一直线而匹配出来的结果。

体是一种强耦合的系统。在超导现象的平均场理论中, 超导相变中的凝聚算符 \mathcal{O} 在临界温度附近有如下的平方根行为

$$\langle \mathcal{O} \rangle \sim (T - T_c)^{1/2}, \quad T \rightarrow T_c. \quad (3.19)$$

在图3.1中通过拟合凝聚在临界温度附近的行为可知该凝聚算符有如下行为

$$\langle \mathcal{O} \rangle \approx 15.6435 T_c (1 - T/T_c)^{1/2}, \quad T \rightarrow T_c, \quad (3.20)$$

对于本节中的D3/D3模型, 临界温度 $T_c = 0.0827962\mu$ 。因此, 与高维空间中的全息超导模型类似, 凝聚算符在临界温度附近具有平均场预言的行为, 这说明全息超导相变是一个二级相变。

在得到耦合方程组3.15的数值解后, 根据规范/引力对偶的方案可以计算该超导系统的自由能, 这个过程需要做全息重整化以消除在渐近AdS几何的红外部分($u \rightarrow 0$ 的几何区域)引入的发散。如果只关心该系统的相变行为, 正常相与超导相间的自由能之差才是最有意义的, 其具体表达式为

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{N-SC}} = \mathcal{V} \int_0^1 du \sqrt{-G} g^{tt} [\phi(u)\varphi(u)]^2 \equiv \mathcal{V} \Delta F, \quad (3.21)$$

其中, \mathcal{V} 与D3/D3模型相关的常数, 它正比于 $(1+1)$ 时空的体积。图3.2描绘了该 p 波超导体的一些热力学性质, 其中左边的子图展示了超导相中化学势 μ 与密度 ρ 间的关系, 右边的子图是正常相与超导相间自由能密度之差 ΔF 。从

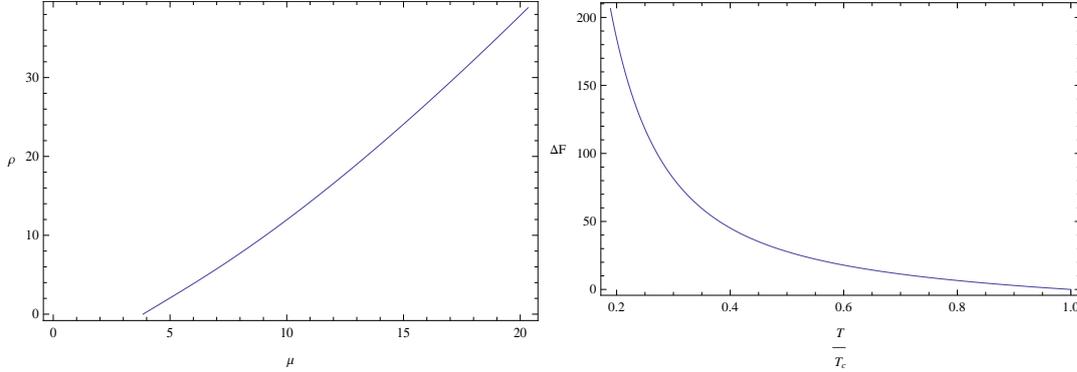


图 3.2: 左图中显示在对称性破缺相中同位旋化学势 μ 与其密度 ρ 之间的关系。右图中显示正常相与超导相间系统的自由能密度之差 ΔF 。

图3.2中可明显的看出，在临界温度以下 $\Delta F > 0$ ，对称性破缺的超导相是热力学稳定的，它是该系统稳定的基态。

超导现象的另一个重要属性就是其直流电导率为无限大，为了证明D3/D3模型在低温相下确实具有超导性需要研究该系统在上述基态下的电磁扰动及其线性响应。在探测D-brane极限下，该超导系统的各种扰动模式中的规范场部分和度规部分相互退耦，这一特点在很大程度上简化了我们的分析。考虑背景规范场(3.12)的如下扰动形式

$$A_M^a \rightarrow A_M^a + a_M^a(t, x, u), \quad a_u^a(t, x, u) = 0,$$

其中，规范 $a_u^a = 0$ 的选取与文献中利用全息方法研究强耦合问题的习惯相同，我们称其为径向规范。为了计算交流电导率，只需要考虑扰动模式 $\{a_t^1(t, x, u), a_t^2(t, x, u), a_x^3(t, x, u)\}$ ，而且他们对于时间的依赖可取为平面波型： $\{a_t^1(t, x, u), a_t^2(t, x, u), a_x^3(t, x, u)\} \sim e^{-i\omega t} \{a_t^1(u), a_t^2(u), a_x^3(u)\}$ 。

将杨-米尔斯方程(3.11)做线性化可得这些扰动模式的运动方程，

$$\begin{cases} a_t^{1''} + \frac{1}{u} a_t^{1'} + \frac{1}{f(u)} \phi \psi a_x^3 = 0 \\ a_t^{2''} + \frac{1}{u} a_t^{2'} - \frac{1}{f(u)} (i\tilde{\omega} \psi a_x^3 + \psi^2 a_t^2) = 0 \\ a_x^{3''} + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{1}{u} \right] a_x^{3'} - \frac{1}{f^2(u)} [-\tilde{\omega}^2 a_x^3 + \phi \psi a_t^1 + i\tilde{\omega} \psi a_t^2] = 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

其中，无量纲化的频率 $\tilde{\omega} = \omega/(\pi T)$ 。实际上，径向规范条件 $a_u^a = 0$ 相应的运动方程将会给出额外的两个限制方程，由于它们与电导率的计算没有直接关系，

这里为了简洁起见而略去。Gubser和Pufu在文章[94]中指出：电导率是一个物理量，它应该与规范的选取无关；因此，为了计算全息模型在超导相的电导率需要用耦合的扰动模式 $\{a_t^1(u), a_t^2(u), a_x^3(u)\}$ 线性地组合出一个规范不变的新模式。符合这种要求的一个模式为

$$\tilde{a}_x^3 = a_x^3 + \varphi \frac{i\tilde{\omega}a_t^2 + \phi a_t^1}{\phi^2 - \tilde{\omega}}. \quad (3.23)$$

在数值求解扰动模式的方程组(3.22)之前，需要研究它们在正则奇点 $u = 0$ 和 $u = 1$ 附近的渐近行为。通过Frobenius分析可知这些扰动模式在黑洞视界 $u = 1$ 处有如下行为

$$\begin{cases} a_x^3 = (1-u)^\alpha \left[1 + a_x^{3(1)}(1-u) + a_x^{3(2)}(1-u)^2 + a_x^{3(3)}(1-u)^3 + \dots \right] \\ a_t^1 = (1-u)^\alpha \left[a_t^{1(1)}(1-u) + a_t^{1(2)}(1-u)^2 + a_t^{1(3)}(1-u)^3 + \dots \right] \\ a_t^2 = (1-u)^\alpha \left[a_t^{2(1)}(1-u) + a_t^{2(2)}(1-u)^2 + a_t^{2(3)}(1-u)^3 + \dots \right], \end{cases} \quad (3.24)$$

其中，指数 $\alpha = -i\tilde{\omega}/4$ 的选取是为了使得各个扰动模式在黑洞视界处满足入射波的边界条件，这是因为我们需要计算推迟格林函数。而且，公式(3.24)中的展开系数均为频率的函数，可以通过将这些表达式代入方程组(3.22)中得到。

在共形边界 $u = 0$ 处，同样的分析得到这些扰动模式的渐近行为如下，

$$\begin{cases} a_t^1 = A_t^{1(0)} + A_t^{1(1)} \log u + \dots \\ a_t^2 = A_t^{2(0)} + A_t^{2(1)} \log u + \dots \\ a_x^3 = A_x^{3(0)} + A_x^{3(1)} \log u + \dots \end{cases} \quad (3.25)$$

容易看出，与高维全息超导模型明显不同的是，这些非阿贝尔规范场的扰动模式在共形边界附近的行为中有对数项，这与在建立该(1+1)维全息超导模型基态时遇到的情形—背景场 ϕ, φ 在 $u = 0$ 处的渐近行为是一致的。这个对数项的出现使得我们需要重新考虑计算电磁扰动的推迟格林函数的方案。将渐近行为(3.25)代入新定义的规范不变的模式(3.23)并在 $u = 0$ 处展开，

$$\begin{aligned} \tilde{a}_x^3 &= \tilde{A}_x^{3(1)} + \tilde{A}_x^{3(0)} \log u + \dots, \quad u \rightarrow 0, \\ \tilde{A}_x^{3(1)} &= A_x^{3(0)}, \quad \tilde{A}_x^{3(0)} = A_x^{3(1)} + \frac{A_t^{1(0)}\varphi^{(1)}}{\mu}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

按照文章[105]中的有关论述可知这种情形下计算推迟格林函数及交流电导率的方案为

$$G_R(\omega) = -\frac{\tilde{A}_x^{(1)}}{\tilde{A}_x^{(0)}}, \quad \sigma(\omega) = -\frac{1}{i\omega} \frac{\tilde{A}_x^{(1)}}{\tilde{A}_x^{(0)}}. \quad (3.27)$$

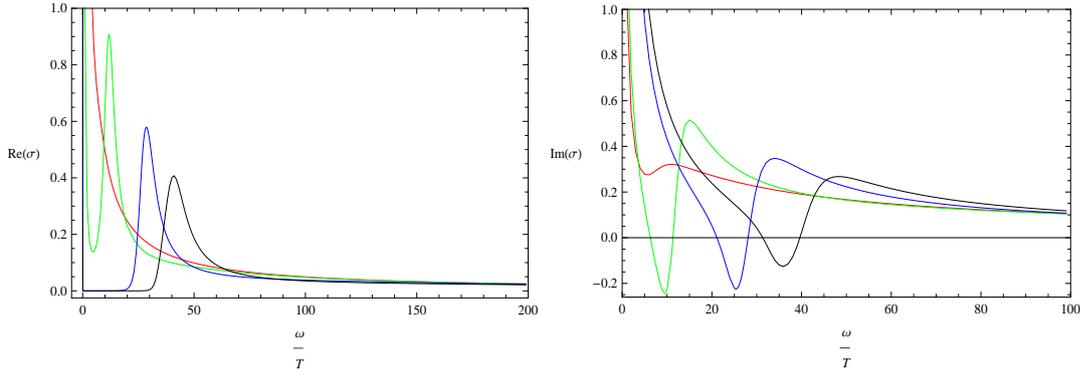


图 3.3: $(1+1)$ 维时空中 p 波全息超导体的交流电导率 $\sigma(\omega)$ 。左图中的显示的是电导率的实部 $\text{Re}\sigma(\omega)$ ，在 $\omega = 0$ 处出现直流超导；当温度足够低时，电导率的实部在低频区出现一能带结构，而且在高频区 $\omega \rightarrow \infty$ ，电导率趋于零。右图是电导率的虚部 $\text{Im}\sigma(\omega)$ ，在超导相中它有一极小值，相应的频率定义为 ω_g 。两幅图中不同颜色的曲线对应于不同的温度： $T/T_c=1.0$ (红线)， 0.664919 (绿线)， 0.269669 (蓝线)， 0.189074 (黑线)。

在此方案下，图3.3中所绘制的曲线是有限温度有限同位旋密度的D3/D3模型作为 $(1+1)$ 维时空中 p 波超导体的全息引力对偶的交流电导率。在 $T = T_c$ 处，该全息超导系统处于临界状态且 $\langle \mathcal{O} \rangle = 0$ ，其电导率曲线(图3.3中的红线)与文献[101, 102]中给出的数值结果一致。在临界温度之下，系统进入 $U(1)$ 对称性自发破缺的超导相， $\langle \mathcal{O} \rangle \neq 0$ 。从图3.3中可以明显的看出，当 $\omega \rightarrow 0$ 时电导率出现一 δ 函数式的峰值，这正是直流超导的标志。这一特点可用Kramers-Kronig关系式来解释，该关系式将一个具有因果关系的物理量的实部和虚部联系起来，而且可以探测他们各自的分布部分，而电导率正是这样的一个物理量。将Kramers-Kronig关系式应用于该模型中的电导率

$$\text{Im}[\sigma(\omega)] = -\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\text{Re}[\sigma(\omega')]}{\omega' - \omega}, \quad (3.28)$$

其中， \mathcal{P} 代表积分主值部分。从这个关系式可知，当且仅当电导率的虚部有一极点，即 $\text{Im}\sigma(\omega) = 1/\omega$ 时，该电导率的实部才会出现一 δ 函数式的峰值，即 $\text{Re}\sigma(\omega) = \pi\delta(\omega)$ ；反之亦然。实际上，从图3.3中可以看出这些曲线在 $\omega \rightarrow 0$ 极限下趋向于无限大。

交流电导率的实部 $\text{Re}\sigma(\omega)$ 在低频区出现(赭)带隙结构，而且随着系统温度的持续降低该带隙变宽，相应的电导率在红外区压的更低，它对应着凝聚程度的增大；过了这一个电导率的压低区之后，它在某一临界频率 ω_g 附近迅速增长，文章[108]系统的研究了 s 波全息超导模型下这个临界频率，并将其定义为交流电导率虚部的极小值对应的频率，称其为交流电导率的带隙。从图3.3中不难读出相应温度下 ω_g 的具体数值，例如由蓝线标识的交流电导率有

$$\frac{\omega_g}{T} \approx 25, \frac{T}{T_c} = 0.269669 \implies 6.74T_c, \quad (3.29)$$

而且用其它温度下的曲线得到的带隙频率 ω_g 与这个数值很接近。在高维空间中的 p 波全息超导模型中，计算超导相的导电行为时需要考虑两组相互退耦的扰动模式，用文献[94]中的符号标记它们： $\{a_y^3\}$ 和 $\{a_t^1, a_t^2, a_x^3\}$ 。然而，在 $(1+1)$ 维时空中，只有耦合的扰动模式 $\{a_t^1, a_t^2, a_x^3\}$ 是与电导率相关的，而且电导率的最终结果与文献[94]中由 a_y^3 扰动模式给出的相似。可见，虽然在应用D3/D3模型构建 $(1+1)$ 时空中 p 波全息超导体的基态和超导相中电磁扰动时这些模式在边界 $u=0$ 处的渐近行为不同于高维全息超导的情形，而且需要重新考察计算超导凝聚算符真空期望值和电导率的方案，但是我们的结果与高维空间中的全息模型给出的结果类似，这意味着全息方法在研究强耦合系统中有普适性。

3.3 具有动力学临界指数的全息超导体

到目前为止，本论文在应用全息对偶的方法研究常见的强耦合物理系统时都是在渐近AdS的框架下进行的。按照全息重整化的观点，引力几何的这一特征意味着它的对偶场论在**高能区有一个紫外固定点。根据Wilson重整化及有效场论思想，这在很多实际物理系统中是不必要的，而且实际情况中我们很难找到一个既符合低能区物理现象又具有完整紫外区的形式理论。同样，在应用规范/引力对偶研究强耦合系统时，如果只关心实验可探测的低能量区，我们可以抛弃这个渐近AdS的限制。另外，凝聚态物理系统大多是可以非相对论处理的低速物理体系，因此，人们自然期望建立非相对论共形场论的

全息引力对偶。文献中主要有两类这样的非相对论型的规范/引力对偶框架，具有Lifshitz固定点的引力对偶[44]和具有薛定谔对称性的共形场论的引力对偶[109, 110]。这两类几何均是在Bottom-Up的方式下建立起来的，可以通过一定的方式将它们嵌入到完整的超弦/M理论中。

在这一节中，我们考虑具有动力学临界指数的 p 波超导体的全息引力构建。为了达到这一目的，我们需要在公式(1.73)中所示的零温下的Lifshitz几何中引入黑洞，以使得其对偶场论生活在有限温度的环境中，在文献[111, 112]的习惯下这样的黑洞几何度规为

$$ds^2 = L^2 \left(-r^{2z} f(r) dt^2 + r^2 \sum_{i=1}^d dx_i^2 + \frac{dr^2}{r^2 f(r)} \right), \quad (3.30)$$

$$f(r) = 1 - \frac{r_0^{z+d}}{r^{z+d}}, \quad \Lambda = -\frac{(z+d-1)(z+d)}{2L^2}.$$

同时，按照Hartnoll在[10]中的论述，黑洞几何(3.30)可以是Einstein-Maxwell-Dilaton系统的解[111]

$$S = \frac{1}{16\pi G_{d+2}} \int d^{d+2}x \sqrt{-g} \left(R - 2\Lambda - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{4} e^{\lambda\phi} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \right), \quad (3.31)$$

$$e^{\lambda\phi} = r^{-2d}, \quad \lambda^2 = \frac{2d}{z-1}, \quad \mathcal{F}_{rt} = q_0 r^{z+d-1}, \quad q_0^2 = 2L^2(z-1)(z+d),$$

其中， Λ 是负值的宇宙学常数。在临界指数 $z = 1$ 时，上述系统退化到渐近 AdS_{d+2} 黑洞。

应用黑洞热力学，黑洞几何(3.30)的Hawking温度与Bekenstein熵密度为

$$T = \frac{z+d}{4\pi} r_0^z, \quad s = \frac{L^d r_0^d}{4G_{d+2}}. \quad (3.32)$$

为了数值计算的方便，对全息坐标 r 做替换 $u = r_0/r$ 可以将其映射到有限区间中。在 u 坐标架下，度规(3.30)有如下简洁形式(这里取 $d = 2$)

$$ds^2 = L^2 \left(-\frac{r_0^{2z}}{u^{2z}} f(u) dt^2 + \frac{r_0^2}{u^2} (dx^2 + dy^2) + \frac{du^2}{u^2 f(u)} \right), \quad f(u) = 1 - u^{z+2}, \quad (3.33)$$

这里， $u = 0$ 和 1 分别是黑洞几何(3.33)的共形边界和黑洞视界。

具有动力学临界指数的 s 波全息超导体在[113, 114]中有相应的研究，但是文献[113]只给出了超导相的基态性质，文章[114]中的给出的超导相的电导率异

常的小。为了进一步澄清这些事实，我们在[115]中重新考察了这一模型并将其推广到 p 波超导体情形。我们的研究发现：在动力学临界指数 $z = 2$ 时， s 波与 p 波超导体的基态与电荷输运性质很相似。因此，本节接下来的主要内容则集中于具有动力学临界指数 $z = 2$ 的 p 波全息超导体。由于渐近AdS时空下的 p 波全息超导体已有系统的研究，其基本框架与上一节中的(1 + 1)维时空中的情形一致，因此我们这里略去一般的论述。在黑洞背景(3.33)中加入 $SU(2)$ 的规范场 A_M^a ，在探测极限下可以忽略它们对该几何的影响，只需考虑如公式(3.10)所示的规范场动力学

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \text{Tr} (F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}), \quad (3.34)$$

按照[107]的分析可知，对规范场的背景 A_M^a 可取假设(3.12)，这些分量遵循杨-米尔斯方程，

$$\begin{cases} \phi'' + \frac{z-1}{u} \phi' + \frac{\psi^2}{f(u)} \phi = 0, \\ \psi'' + \left[\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{1-z}{u} \right] \psi' + \frac{u^{2z-2} \phi^2}{f^2(u)} \psi = 0, \end{cases} \quad (3.35)$$

其中，模式 ϕ ， ψ 是无量纲化的规范场，由于时空标度异性行为(1.74)，它们的定义如下

$$\phi \equiv \frac{z+2}{4\pi T} A_0^3, \quad \psi \equiv \left(\frac{z+2}{4\pi T} \right)^{1/z} A_1^1. \quad (3.36)$$

当系统的温度 $T < T_c$ 时，上述Einstein-Yang-Mills系统的稳定基态为全息超导相： ϕ 和 ψ 有非平庸的形状。根据全息对偶方案，它们在边界 $u = 0$ 的行为与其对偶场论的物理量直接相关。由于临界指数 $z = 2$ 的情形在凝聚态系统中占有相当重要的地位，本节后面的讨论仅限于 $z = 2$ 这一特例。由运动方程(3.35)可知这些模式在边界处的渐近行为

$$\phi(u \rightarrow 0) \approx \rho + \mu \log u, \quad \psi(u \rightarrow 0) \approx \psi^{(0)} + \psi^{(2)} u^2. \quad (3.37)$$

可见，非平庸的临界指数 z 明显破坏时空间各向同性：由于 ϕ 模式的运动方程在 $u = 0$ 处有简并的微分方程临界指数，我们需要在其渐近展开中引入对数项，其系数 ρ 和 μ 分别是手动引入的有限密度和化学势；规范场模式 $\psi \sim A_1^1$ 与对偶超导体的凝聚算符有关，可归一化的模式 $\psi^{(2)}$ 是凝聚算符 \mathcal{O} 的真空期望值，系数 $\psi^{(0)}$ 是该算符的源。超导对称性破缺是自发性的，它在全息框架下的实现为

$$\psi^{(0)} = 0, \quad \psi^{(2)} \sim \langle \mathcal{O} \rangle, \quad (3.38)$$

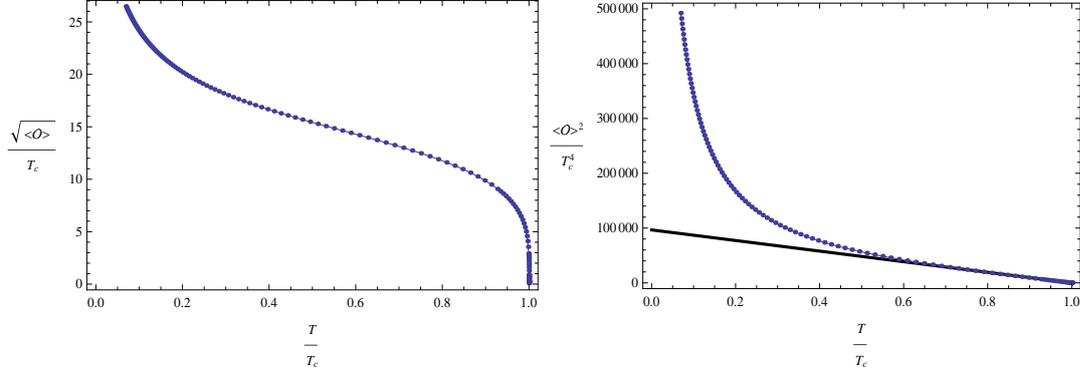


图 3.4: 具有动力学临界指数的 p 波全息超导体的凝聚算符 \mathcal{O} 的真空期望值, 当 T 趋于临界温度 T_c 时, 凝聚逐渐消失。右图中的黑色直线是拟合 \mathcal{O} 在临界温度附近的数据为一直线而匹配出来的结果。

该凝聚是一个标度维数为二的算符。利用上一节所描述的数值方法, 在图3.4中绘出了在凝聚算符的期望值随温度的变化行为。与渐近AdS空间中的全息 p 波超导体相比, 凝聚 $\langle\mathcal{O}\rangle$ 在 $T \rightarrow 0$ 时并不是趋于有限常数值而是以较大速率增大, 这是非平庸的临界指数 $z \neq 1$ 的一个明显效应, 同时这也表明探测极限近似在低温下不再是合理的假设。在相变附近 $T \rightarrow T_c$, 图3.4中的黑色曲线表明通过拟合超导凝聚 \mathcal{O} 在 T_c 附近的数值可知它具有平均场行为,

$$\langle\mathcal{O}\rangle \approx (17.634T_c)^2 (1 - T/T_c)^{1/2}, \quad T \rightarrow T_c, \quad (3.39)$$

其中, 临界温度 $T_c = 0.0367064\mu$ 。凝聚的平均场行为表明该超导相变的临界指数为 $1/2$, 属于二级相变, 这一属性已成为全息超导体的一个普适性质¹。在数值建立的超导相基态的基础上, 正常相与超导相的自由能密度之差 ΔF 描绘在图3.5中, 同时该图也描述了化学势与密度间的关联。

作为本节的最后一个部分, 我们陈述该全息超导系统在超导相中的电荷输运性质, 即交流电导率 $\sigma(\omega)$ 。由于 p 波超导的序参量 \mathcal{O} (对偶于 A_1^1)破坏空间转动对称性, 在计算电导率时需考虑如下两个相互退偶的电磁扰动模式

$$\begin{aligned} \{a_y^3(u, t)\} &\sim e^{-i\omega t} \{a_y^3(u)\}, \\ \{a_t^1(u, t), a_t^2(u, t), a_x^3(u, t)\} &\sim e^{-i\omega t} \{a_t^1(u), a_t^2(u), a_x^3(u)\}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

¹当考虑了物质场对背景几何的反作用时, 全息超导相变可以随该反作用的强弱变化而成为一级相变, 详细讨论可见[116]。

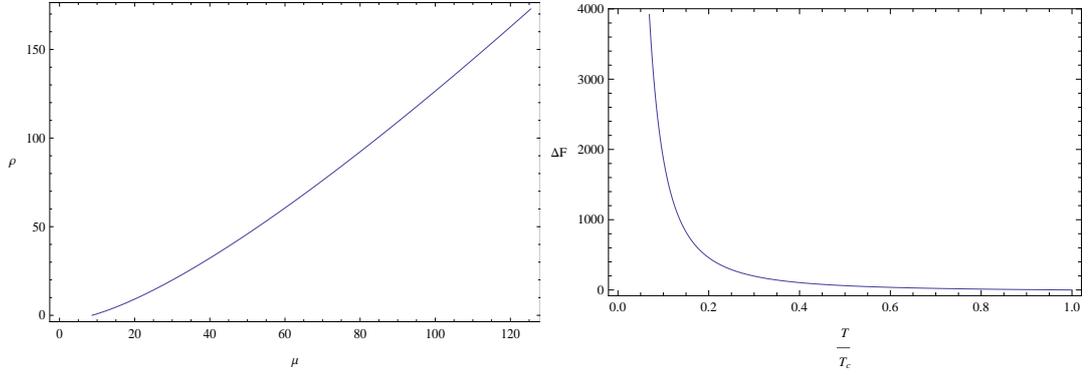


图 3.5: 左图中显示在对称性破缺相中同位旋化学势 μ 与其密度 ρ 之间的关系。右图中显示正常相与超导相间系统的自由能密度之差 ΔF ；在临界温度 T_c 以下， $\Delta F > 0$ 表明对称性破缺的超导相是热力学稳定的。

在公式(3.40)中对这些扰动模式已经做了平面波假设。对杨-米尔斯方程做线性化，扰动模式 $a_y^3(u)$ 满足如下方程

$$a_y^{3''} + \left[\frac{f(u)'}{f(u)} - \frac{z-1}{u} \right] a_y^{3'} + \left[\frac{u^{2z-2} \tilde{\omega}^2}{f(u)^2} - \frac{\psi^2}{f(u)} \right] a_y^3 = 0, \quad (3.41)$$

而耦合的扰动模式 $\{a_t^1, a_t^2, a_x^3\}$ 遵循的运动方程与上一节的相应情形相似，

$$\begin{cases} a_t^{1''} + \frac{z-1}{u} a_t^{1'} + \frac{\phi\psi}{f(u)} a_x^3 = 0, \\ a_t^{2''} + \frac{z-1}{u} a_t^{2'} - \frac{\psi}{f(u)} (i\tilde{\omega} a_x^3 + \psi a_t^2) = 0, \\ a_x^{3''} + \left[\frac{f(u)'}{f(u)} + \frac{1-z}{u} \right] a_x^{3'} - \frac{u^{2z-2}}{f(u)^2} (-\tilde{\omega}^2 a_x^3 + \phi\psi a_t^1 + i\tilde{\omega}\psi a_t^2) = 0. \end{cases} \quad (3.42)$$

扰动模式 a_y^3 在共形边界 $u = 0$ 处有行为

$$a_y^3(u \rightarrow 0) \approx A_y^{3(0)} + A_y^{3(1)} u^2 + \dots, \quad (3.43)$$

根据全息对偶方案，沿 y 方向的交流电导率定义为

$$\sigma_{yy}(\omega) = \frac{1}{i\omega} \frac{A_y^{3(1)}}{A_y^{3(0)}}. \quad (3.44)$$

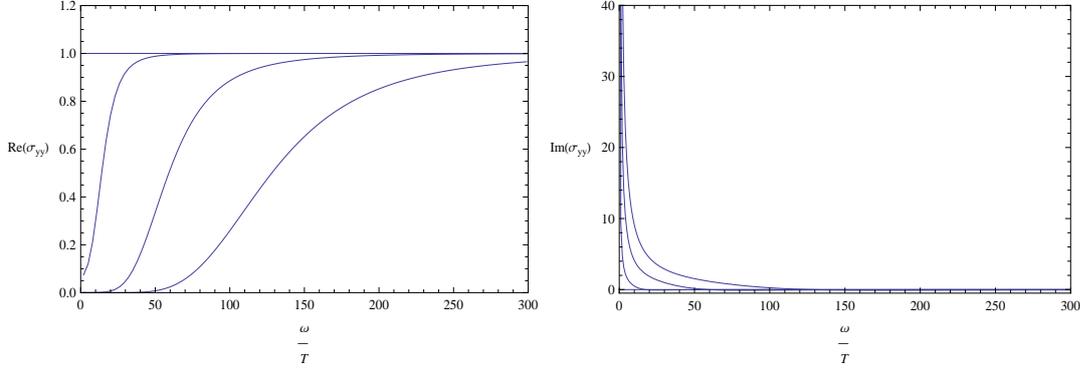


图 3.6: 动力学临界指数 $z = 2$ 的 p 波全息超导体沿 y 方向的交流电导率 $\sigma_{yy}(\omega)$, 在 $\omega = 0$ 处出现直流超导。左图中的显示的是电导率的实部 $\text{Re}\sigma_{yy}(\omega)$: 当温度足够低时, 电导率的实部在低频区出现一能带结构, 而且在高频区 $\omega \rightarrow \infty$, 电导率趋于 1。右图是电导率的虚部 $\text{Im}\sigma_{yy}(\omega)$, 其行为与用渐近 AdS 时空构建的全息超导体不同。两幅子图中不同的曲线对应于不同的温度(从上至下): $T/T_c = 1.0, 0.588587, 0.171829, 0.079889, 0.0691493$ 。

沿 y 方向的电导率可以通过数值求解扰动方程(3.41)得到, 其数值结果描绘在图 3.6 中。从图 3.6 中容易看出电导率虚部在 $\omega = 0$ 处有一极点, 即 $\text{Im}\sigma_{yy}(\omega) \sim 1/\omega$, 根据 Kramers-Kronig 关系式可知电导率的实部在 $\omega = 0$ 处呈现 δ -函数式峰值, 即 $\text{Re}\sigma_{yy}(\omega) \sim \delta(\omega)$, 这标志着系统具有直流超导性。同时, 电导率的实部显示在低频区有带隙形成, 而且该带隙随凝聚程度的增大而变宽。临界指数 $\neq 1$ 导致电导率的虚部很快衰减为零, 且不存在极小值, 与用渐近 AdS 时空构建的 p 波超导体性质有所不同。 p 波超导体由于其序参量为矢量而破坏空间转动对称性, 这使得它具有空间各向异性, 为此我们需要考察超导相中沿 x 方向的电导率。相互耦合的扰动模式 $\{a_t^1, a_t^2, a_x^3\}$ 在共形边界 $u = 0$ 处的行为如下

$$\begin{cases} a_t^1 = A_t^{1(0)} + A_t^{1(1)} \log u + \dots, \\ a_t^2 = A_t^{2(0)} + A_t^{2(1)} \log u + \dots, \\ a_x^3 = A_x^{3(0)} + A_x^{3(1)} u^2 + \dots, \end{cases} \quad (3.45)$$

公式(3.23)中定义的规范不变的模式 \tilde{a}_x^3 在 $u = 0$ 有如下展开行为

$$\begin{aligned} \tilde{a}_x^3 &= \tilde{A}_x^{3(0)} + \tilde{A}_x^{3(1)} u^2 + \dots, \\ \tilde{A}_x^{3(0)} &= A_x^{3(0)}, \tilde{A}_x^{3(1)} = \frac{A_t^{1(0)}}{\mu} \psi^{(2)} + A_x^{3(1)}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

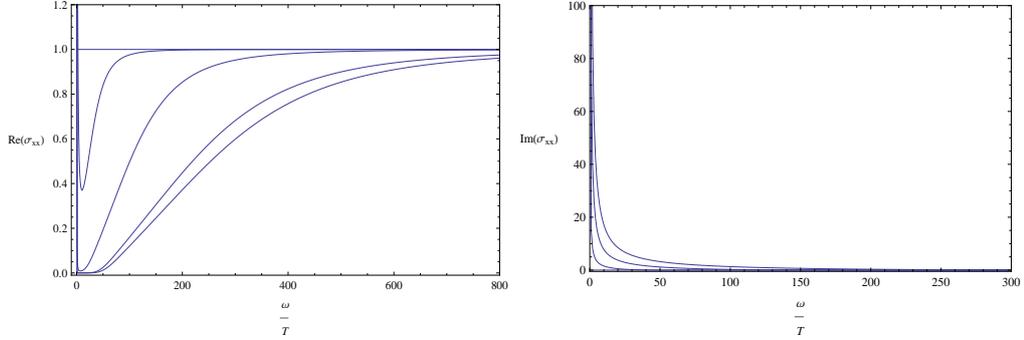


图 3.7: 动力学临界指数 $z = 2$ 的 p 波全息超导体沿 x 方向的交流电导率 $\sigma_{xx}(\omega)$, 在 $\omega = 0$ 处出现直流超导。其行为与图 3.6 中所示的沿 y 方向的电导率基本一致。两幅子图中不同的曲线对应于不同的温度(从上至下): $T/T_c=1.0, 0.588587, 0.171829, 0.079889, 0.0691493$ 。

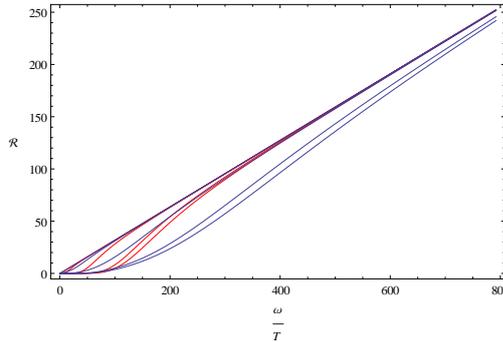


图 3.8: 扰动模式 a_y^3 (红线) 和 a_x^3 (蓝线) 的谱函数随频率的变化行为, 不同的曲线相应于不同的超导凝聚值。

运用这个规范不变的扰动模式可知沿 x 方向的电导率可定义为

$$\sigma_{xx}(\omega) = \frac{1}{i\omega} \frac{\tilde{A}_x^3(1)}{\tilde{A}_x^3(0)}. \quad (3.47)$$

图 3.7 中是通过数值方法计算耦合的扰动模式而得到的沿 x 方向的交流电导率, 其行为与图 3.6 中展示的结果基本一致。但是, p 波超导体的各向异性在这里表现为电导率实部沿 x 和 y 方向的增长速度的不同。为了更清晰的展示这一特征, 图 3.8 中绘制了扰动模式 a_y^3 和 a_x^3 相应的谱函数, 它们随 ω 的增长速率不同。

综合本章的内容，化学势诱导的全息超导体在研究类超导相变的某些性质方面具有普适性：忽略物质场对背景几何反作用情形下，超导凝聚在相变附近具有平均场行为，全息超导相变是一个二级相变；在 $\omega = 0$ 处，电导率趋于无限大，全息超导体出现直流超导性；高维空间的 p 波全息超导体具有明显的各向异性等。然而本章的研究内容有较大的局限性：

(1)在分析电磁扰动模式时，关闭了它们对空间动量的依赖，这在考察超导相中的电荷输运行为上是足够的。 p 波超导体的各向异性行为使得在打开这些扰动模式对空间的依赖时变得复杂，然而，正是这一特点将会丰富 p 超导体的研究内容和一些新现象。

(2)本章的研究都是在探测极限下进行的，这种极限在凝聚不够大的时候是较合理的。在 $T \rightarrow 0$ 时，超导凝聚值对背景几何的影响显得比较重要，特别是在 $z = 2$ 的 p 波超导体中，因此，极端低温下需要考虑凝聚的反作用。

文献[116–119]结合以上两点，在渐近 AdS_5 空间中构建了包含物质场反作用的 p 波全息超导基态并对它的一些性质做了系统的研究：由于 p 波超导的各向异性，即使在Einstein引力框架下，剪切粘滞系数与熵密度的比值 η/s 也不再是一个普适的常数；同时， p 波序参量导致的各向异性使得超导相的电流和热流混合产生热电效应、挠曲电效应以及压电效应。将这些研究内容推广到本章中的全息超导模型中是很有趣的。

费米面在理解凝聚态物理中的一些现象中是相当重要的，低温超导的BCS理论认为超导现象是因为费米面附近的电子配对后相干凝聚而形成的。因此，费米面的结构对于超导的形成过程以及超导体的各种特性有着密切的联系。在规范/引力对偶的框架下，全息费米面的研究是通过在bulk理论中引入费米型的场并计算其关联函数。对一些简单模型的研究[11]已经得到了与高温铜基系统和重电子系统相似的性质。因此，进一步研究全息超导凝聚对于全息费米面及相关性质具有重要意义，有关内容的初步研究可见[120, 121]。在3.2中建立的一维 p 波全息超导模型是比较特殊的：一维空间中朗道费米液体理论已不再适用；用全息方法探测一维空间中超导体的费米点问题是值得探讨的。

第四章 磁场诱导的全息超导相变

抗磁性是超导体的另一重要特点，通过在全息超导框架下引入均匀磁场来研究该类超导系统在外磁场中的行为发现[122, 123]：存在一临界磁场，而且当磁场强度低于该临界值时带电的类超导凝聚可通过二级相变形成，这是Meissner效应的全息实现。在实际的凝聚态物理系统中，平移对称性会被掺杂所破坏，而上一章中所研究的全息超导体是一种空间齐性系统。Hartnoll, Herzog 及Horowitz在文章[41]中论述到：在非全息超导系统中，当考虑到物质场对于引力几何的反作用时，电导率的实部会在 $\omega = 0$ 处出现 δ -函数形式的峰值；然而，它与全息超导体中的直流超导性是有本质区别的，而且这个不实际的无穷大直流电导率可以通过引入杂质而破坏系统的平移不变性来消除。

最近，在渐近AdS时空中的Einstein-Maxwell-Scalar系统中通过手动方式引入周期性栅格结构而破坏全息对偶理论的平移对称性的工作[124, 125]引起了广泛的关注。其中，文献[124]考虑了s波全息超导系统中通过受调制的化学势来引入周期性栅格结构，而且在临界温度之下系统的基态是一个超导stripe；而文献[125]考虑了在bulk理论中通过中性标量场引入周期性栅格并考虑其对引力度规的反作用，从电导率的数值计算发现： $\omega = 0$ 下的无穷大电导率消失，直流电导率成为一个有有限宽度和数值的量；而且，该系统的光学电导率展现出Drude peak行为，在高频区过渡到指数定律行为，这些结果与铜基系统的物理有些相似之处。

全息超导模型是在对渐近AdS黑洞几何的稳定性研究基础上建立起来的[43, 107]。这些研究多集中于化学势诱导的黑洞不稳定性，而且在低温相下的稳定基态仍具有平移对称性。文章[126]考察了Scharzschild-AdS₅黑洞在较大磁场下的行为：若磁场由SU(2)规范场的某一空间分量提供，当磁场B超过某一临界值时渐近AdS黑洞出现不稳定性，带电矢量算符的凝聚可以使系统在大磁场条件下得到稳定。另外，有研究表明[127]：大磁场中的QCD真空将会成为电磁超导体，这主要是由于强力与电磁力间的相互作用导致带电的 ρ 介子产生自发凝聚而形成空间非齐性的超导 ρ 介子涡旋结构。鉴于这些研究，文献[128]构建了全息对偶场论中由于大磁场诱导而形成的p波超导基态：它在垂直于磁场的空间方向形成一个三角的Abrikosov栅格结构，而且这个栅格是由

带电矢量算符凝聚而产生的超导涡旋组成。这个基态的行为与第二类超导体在较大临界磁场附近的行为相似。本章的主要内容来自于文献[126, 128]以及一些未发表的笔记。

4.1 磁场诱导的不稳定性：渐近AdS时空

考虑(4 + 1)维渐近AdS时空中的 $SU(2)$ 的Einstein-Yang-Mills理论，其动力学由如下作用量决定

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa_5^2} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \right], \quad (4.1)$$

其中， κ_5 是五维的引力常数， $\Lambda = -6/L^2$ 是负值的宇宙学常数， L 是渐近AdS空间的半径， e 是规范耦合常数。 $SU(2)$ 的规范场强为

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (4.2)$$

上述系统被用来构建化学势诱导的 p 波全息超导系统，然而，这里我们通过规范场的空间分量引入“味道”磁场

$$A_y^3 = Bx \quad \implies \quad B = F_{xy}^3, \quad (4.3)$$

可见，在选取磁场沿 z 方向后，上述系统的对偶场论的 $SO(3)$ 转动对称性被明显破缺到 $SO(2)$ ；同时，选取规范场在味道空间的第三方向使得 $SU(2)$ 的规范对称性明显破缺到它的 $U(1)$ 子群。我们将这个剩余的规范对称性等同于电磁规范对称性。

在探测极限下 $\kappa_5/e \rightarrow 0$ ，规范场与度规场的动力学是相互退耦的，磁场对于渐近 AdS_5 几何的影响可忽略不计。我们主要考虑如下两种情形：Schwarzschild- AdS_5 和硬墙截断的纯 AdS_5 时空，将其度规统一地写成

$$ds^2 = \frac{L^2}{u^2} \left(-f(u)dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{du^2}{f(u)} \right), \quad (4.4)$$

当 $f(u) = 1 - u^4/u_h^4$ 时，它是五维的AdS黑洞背景，相应的Hawking温度为 $T = 1/\pi u_h$ ；当 $f(u) = 1$ 时，在该几何的红外区域引入截断使得纯 AdS_5 几何终止于 $u = u_c$ 。然而，只有在涉及具体数值计算时才会指定所使用的全息背景时空，

因此我们的结论具有一般性。在探测极限下只需考虑规范场部分的动力学，它由Yang-Mills场的运动方程支配，

$$\partial_\mu (\sqrt{-g}F^{a\mu\nu}) + \sqrt{-g}\epsilon^{abc}A_\mu^b F^{c\mu\nu} = 0. \quad (4.5)$$

当物理系统处于平衡态附近时其行为可以用线性响应来描述，外部扰动的效应由推迟两点格林函数与该扰动的源之间的卷积来确定。根据柯西积分公式，该扰动的响应可表达成为推迟两点格林函数的极点形式[129]，而且这些极点等同于黑洞的准正则模式[74]。每一个准正则模式的相应频率都包含实部和虚部两部分，对于扰动模式的阻尼型震荡，频率的实部决定该扰动模式的能量，而频率的虚部决定该扰动模式的衰减。具体的讲，如果将扰动模式对于时间的依赖关系写成 $\sim e^{-i\omega t}$ 的形式，那么趋向于平衡态的弛豫只能发生在该扰动模式的准正常模式相应的频率位于复平面的下半部分的情形下。在具有黑洞视界的渐近AdS时空中，扰动的准正则模式满足如下边界条件：在黑洞视界处该扰动为一个完全的入射波；而在共形边界处它是一个可以归一化的模式，即该扰动模式在共形边界的渐近展开中不可归一化模式的系数必须为零，这相当于要求扰动模式在共形边界处满足Dirichlet边界条件。实际上，正是Dirichlet边界条件使得黑洞的各种扰动模式的准正则模式离散化。对于硬墙截断的AdS模型，在计算相关扰动的准正则模式时在截断处 $u = u_c$ 处的边界条件在后续内容中有详细论述。

为了揭示渐近AdS₅时空中Einstein-Yang-Mills系统在强磁场下的稳定性，考虑规范场的微小扰动

$$A_M^a \rightarrow A_M^a + a_M^a. \quad (4.6)$$

对方程(4.5)做线性化处理，扰动模式的运动方程为

$$\begin{aligned} \partial_\mu (\sqrt{-g}f^{a\mu\nu}) + \sqrt{-g}\epsilon^{abc} (a_\mu^b F^{c\mu\nu} + A_\mu^b f^{c\mu\nu}) &= 0, \\ f_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu a_\nu^a - \partial_\nu a_\mu^a + \epsilon^{abc} (A_\mu^b a_\nu^c + a_\mu^b A_\nu^c). \end{aligned} \quad (4.7)$$

在径向规范 $a_u^a = 0$ 的选取下，从线性化的Yang-Mills方程(4.7)不难发现，剩余的12个扰动模式可分为如下四个相互退偶的子部分：

$$\{a_{t,x,y,z}^3\}, \quad \{a_z^{1,2}\}, \quad \{a_t^1, a_x^1, a_y^2\}, \quad \{a_t^2, a_x^2, a_y^1\}.$$

其中，磁场 B 在子部分 $\{a_{t,x,y,z}^3\}$ 所满足的运动方程中不出现，因此这些扰动模式的行为与系统在较大磁场中的稳定性无关，可以选取规范将它们关闭：

$$a_{t,x,y,z}^3 = 0.$$

考虑扰动模式子部分 $\{a_z^{1,2}\}$ 。这两个扰动模式满足相同的运动方程：

$$\partial_u^2 a_z^1 + \partial_u \ln(\sqrt{-g} g^{uu} g^{zz}) \partial_u a_z^1 - \frac{g^{tt}}{g^{uu}} \omega^2 a_z^1 - \frac{g^{yy}}{g^{uu}} (Bx)^2 a_z^1 + \frac{g^{xx}}{g^{uu}} \partial_u^2 a_z^1 = 0. \quad (4.8)$$

扰动的子部分 $\{a_t^1, a_x^1, a_y^2\}$ 与 $\{a_t^2, a_x^2, a_y^1\}$ 有相似的行为。根据[130]的分析可知，定义如下扰动模式可使这些耦合的方程得到简化，

$$E_{t,x,y}^\pm \equiv a_{t,x,y}^1 \pm i a_{t,x,y}^2. \quad (4.9)$$

而且这些新定义的模式属于 $U(1)_3$ 群基础表示态，其中， $U(1)_3$ 是bulk中 $SU(2)$ 规范对称性由于磁场 $B = F_{xy}^3$ 的引入而明显破缺到的规范子群，它是由在 $SU(2)$ 的颜色空间沿 τ_3 生成元方向转动而得到的 $U(1)$ 群。本节将证明，当外磁场足够大时，在该子群下规范变换的扰动模式出现不稳定性。将bulk中这一剩余规范对称性与电磁对称性相比拟，那么这种对称性的自发破缺类似于超导相变过程。

新定义的模式 $E_{t,x,y}^+$ 满足如下相互耦合的运动方程：

$$\begin{aligned} \partial_u^2 E_t^+ + \partial_u \ln(\sqrt{-g} g^{uu} g^{tt}) \partial_u E_t^+ + \frac{g^{xx}}{g^{uu}} (\partial_x^2 E_t^+ + i\omega \partial_x E_x^+) - \\ \frac{g^{yy}}{g^{uu}} (\omega Bx E_y^+ + B^2 x^2 E_t^+) = 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \partial_u^2 E_x^+ + \partial_u \ln(\sqrt{-g} g^{uu} g^{xx}) \partial_u E_x^+ + \frac{g^{tt}}{g^{uu}} (-\omega^2 E_x^+ + i\omega \partial_x E_t^+) - \\ \frac{g^{yy}}{g^{uu}} (iB E_y^+ - iBx \partial_x E_y^+ - B^2 x^2 E_x^+) = 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \partial_u^2 E_y^+ + \partial_u \ln(\sqrt{-g} g^{uu} g^{xx}) \partial_u E_y^+ + \frac{g^{tt}}{g^{uu}} (-\omega^2 E_y^+ - \omega Bx \partial_x E_t^+) - \\ \frac{g^{xx}}{g^{uu}} (iB E_x^+ + iBx \partial_x E_x^+ - \partial_x^2 E_y^+) = 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

此外，径向规范 $a_u^a = 0$ 的选取使得这些耦合模式间并不是相互独立的，

$$-i\omega E_t^+ + \frac{g^{xx}}{g^{tt}} \partial_x E_x^+ + \frac{g^{yy}}{g^{tt}} iBx E_y^+ = 0. \quad (4.13)$$

至于扰动模式 $E_{t,x,y}^-$ 所满足的运动方程可通过将(4.10,4.11,4.12,4.13)做复共轭而得到。需要指出的是：在得到上面这些运动方程时，我们假设这些扰动模式只依赖于坐标 t, x, u ，即

$$a_\mu^a(x_\mu) \propto e^{-i\omega t} a_\mu^a(\omega, x, u). \quad (4.14)$$

首先，考虑运动方程(4.8)在增加磁场强度下的行为，下面以模式 a_z^1 为例，对它取如下的ansatz可将它对坐标 u 和 x 的依赖关系分离开

$$a_z^1(u, x) = \varphi(u) \psi(x). \quad (4.15)$$

容易看出, $\varphi(u)$ 和 $\psi(x)$ 分别满足如下微分方程

$$\partial_u^2 \varphi + \partial_u \ln(\sqrt{-g} g^{uu} g^{zz}) \partial_u \varphi - \frac{g^{tt}}{g^{uu}} \omega^2 \varphi + \frac{g^{xx}}{g^{uu}} C \varphi = 0, \quad (4.16)$$

$$\partial_x^2 \psi - [B^2 x^2 + C] \psi = 0. \quad (4.17)$$

模式 ψ 满足韦伯方程, 其一般解可用线性独立的两个抛物线柱函数组成,

$$\psi = C_1 D \left[\frac{-B-C}{2B}, \sqrt{2B}x \right] + C_2 D \left[\frac{-B+C}{2B}, i\sqrt{2B}x \right], \quad (4.18)$$

其中, $D[n, z]$ 是抛物线柱函数, 它在 $z \rightarrow \infty$ 极限下的渐近行为[131]如下: 当复角主值 $\arg z$ 满足条件 $|\arg z| < 3\pi/4$ 时,

$$D[n, z] \sim e^{-z^2/4} z^n \left\{ 1 - \frac{n(n-1)}{2z^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \times 4 \times z^4} - \dots \right\}, \quad (4.19)$$

然而, 当 $\pi/4 < \arg z < 5\pi/4$ 时, D -函数的渐近行为如下

$$D[n, z] \sim e^{-z^2/4} z^n \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)_k \left(\frac{1-n}{2}\right)_k}{k!} \left(-\frac{z^2}{2}\right)^{-k} \right\} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-n)} e^{n\pi i} \times \\ e^{z^2/4} z^{-n-1} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1+n}{2}\right)_k \left(1+\frac{n}{2}\right)_k}{k!} \left(\frac{z^2}{2}\right)^{-k} \right\}. \quad (4.20)$$

应用抛物线柱函数的渐近行为于公式(4.18)中的第二项可知,

$$C_2 = 0 \implies \psi \propto D \left[\frac{-B-C}{2B}, \sqrt{2B}x \right], \quad (4.21)$$

为了使它在 $x \rightarrow -\infty$ 处有限, 我们必须要求

$$\frac{-B-C}{2B} = n \in \{N^+ \cup 0\} \implies C = -(2n+1)B, \quad (4.22)$$

从而使得 $1/\Gamma(-n) \rightarrow 0$ 。这时, φ 满足的方程为

$$\partial_u^2 \varphi + \partial_u \ln(\sqrt{-g} g^{uu} g^{zz}) \partial_u \varphi - \frac{g^{tt}}{g^{uu}} \left[\omega^2 + \frac{g^{xx}}{g^{tt}} (2n+1)B \right] \varphi = 0, \quad (4.23)$$

由于 $g^{xx}/g^{tt} < 0$, 上述方程中的最后一项 $(2n+1)B g^{xx}/g^{tt} < 0$, 因此增加磁场 B 的强度可使扰动 φ 的某一准正则模式 ω_0 的平方变得越来越大, 而不会触及到边缘稳定模式。而且, 在 $B=0$ 时该系统是稳定的, 因此, 磁场强度 B 的增强将增强扰动模式的子部分 $\{a_z^{1,2}\}$ 的稳定性。

由于耦合模式 $\{E_{t,x,y}^+\}$ 与 $\{E_{t,x,y}^-\}$ 的行为相似,我们以 $\{E_{t,x,y}^+\}$ 为例研究增加磁场时可能出现的不稳定性。本节开始已有论述,为了揭示引力系统可能的不稳定性,我们需要计算扰动的准正则模式。该准正则模式相应频率的虚部变成正值是该系统进入不稳定区的重要标志;通常,我们期望准正则模式进入上半复平面发生在 $\omega = 0$ 处。实际上,Gubser在文章[43]中指出:临界情形是如果某一扰动有一个边缘稳定模式,即 $\omega = 0$,我们有理由相信该系统将要进入扰动的不稳定区。在耦合的扰动 $\{E_{t,x,y}^+\}$ 中,选取 $\omega = 0$ 将使得 E_t^+ 与 $\{E_{x,y}^+\}$ 相互退偶;而且,这时扰动 E_t^+ 不会出现边缘稳定模式。当 $E_t^+ = 0$ 时,方程(4.10)和(4.13)一致,因此,关掉扰动模式 E_t^+ 在形式上是自洽的。

既然扰动 E_t^+ 不会出现边缘稳定模式,而且关掉这一扰动不会造成扰动方程的不自洽性,为了简单起见,下面的分析都是在这样的假设下进行的。上述耦合的扰动模式满足的运动方程可简化为

$$\begin{aligned} \partial_u^2 E_x^+ + \partial_u \ln(\sqrt{-g}g^{uu}g^{xx}) \partial_u E_x^+ - \frac{g^{tt}}{g^{uu}} \omega^2 E_x^+ + \\ \frac{g^{yy}}{g^{uu}} \left(\partial_x^2 E_x^+ - \frac{2\partial_x E_x^+}{x} - B^2 x^2 E_x^+ \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

在得到上述退偶方程时应用了由于径向规范选取而导致的限制方程(4.13):它在 $E_t^+ = 0$ 的假设下约化为:

$$\partial_x E_x^+ + iBxE_y^+ = 0.$$

对扰动模式 E_x^+ 做分离变量 $E_x^+ = \phi(u)\rho(x)$ 并代入方程(4.24):

$$\begin{aligned} \partial_u^2 \phi + \partial_u \ln(\sqrt{-g}g^{uu}g^{xx}) \partial_u \phi - \frac{g^{tt}}{g^{uu}} \omega^2 \phi + \frac{g^{yy}}{g^{uu}} C' \phi = 0, \\ \partial_x^2 \rho + \frac{2}{x} \partial_x \rho + (B^2 x^2 + C') \rho = 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

其中, C' 是分离变量常数。 $\rho(x)$ 的一般解是如下特殊函数的线性组合,

$$\rho(x) = e^{\frac{1}{2}Bx^2} \left[C_3 U \left(-\frac{B-C'}{4B}, -\frac{1}{2}, Bx^2 \right) + C_4 L \left(\frac{B-C'}{4B}, -\frac{3}{2}, Bx^2 \right) \right], \quad (4.26)$$

$C_{3,4}$ 是积分常数,可由物理的边界条件确定; U, L 分别是合流超几何函数与广义拉盖尔多项式。合流超几何函数 $U(\alpha, \gamma, z)$ 在 $z \rightarrow \infty$ 极限的渐近行为如

下[131]:

$$U(\alpha, \gamma, z) \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} e^{\pm \alpha \pi i} z^{-\alpha} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\alpha)_n (1 - \gamma + \alpha)_n}{n! z^n} \right\} + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha - \gamma} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma - \alpha)_n (1 - \alpha)_n}{n! z^n} \right\}, \quad (4.27)$$

式中因子 $e^{\pm \alpha \pi i}$ 当复角主值 $-\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$ 时取正号, 当 $-3\pi/2 < \arg z < \pi/2$ 时取负号。而且, 当 z 处于第一、四象限时, $U(\alpha, \gamma, z)$ 的渐近行为主要由公式(4.27)中的第二项主导; 当 z 处于第二、三象限时, $U(\alpha, \gamma, z)$ 的渐近行为主要由第一项主导。为了使得 $x \rightarrow +\infty$ 时 $\rho(x)$ 有限, 我们要求

$$-\frac{B - C'}{4B} = -m \implies C' = (1 - 4m)B, \quad (4.28)$$

其中, m 是非负的整数。由于 $1/\Gamma(-m) = 0$, 因此在空间无穷远处 $x \rightarrow \infty$, 函数 $\rho(x)$ 是有限的。将 C' 代入函数 $\phi(u)$ 的运动方程(4.27)中可知:

$$\partial_u^2 \phi + \partial_u \ln(\sqrt{-g} g^{uu} g^{xx}) \partial_u \phi - \frac{g^{tt}}{g^{uu}} \left(\omega^2 - \frac{g^{yy}}{g^{tt}} (1 - 4m)B \right) \phi = 0, \quad (4.29)$$

值得指出的是, 方程(4.29)与(4.23)具有相似的行为。特别地, 当 $m \neq 0$ 时方程(4.29)中的最后一项 $-g^{yy}/g^{tt}(1-4m)B < 0$, 按照对扰动模式 φ 在方程(4.23)附近的论述可知, 当 $m \neq 0$ 时, 增加磁场强度会使得系统更加稳定。然而当 $m = 0$ 时方程(4.29)中的最后一项 $-g^{yy}/g^{tt}(1-4m)B > 0$, 这时增加磁场 B 的强度会使得 ϕ 的某一稳定的准正则模式 ω_0 的行为与上述情形完全相反: 当磁场足够大时, 该准正则模式的平方 $\omega_0^2 \rightarrow 0$, 对应于边缘稳定模式, 标志着该系统进入不稳定区。而且, 我们期望非负整数 $m = 0$ 对应于该系统的基态, 它使得系统的自由能取极小。

上述不稳定性的出现还可以从另外一个角度来理解, 这与上一章中的化学势诱导的全息超导模型中有效质量平方变成负值类似。在 $m = 0$ 情形下, 函数 $U = L = 1$ 使得 $\rho(x) = \exp(-\frac{1}{2}Bx^2)$, 所以扰动模式 $E_{x,y}^+$ 具有如下简洁的表达式

$$E_x^+ = \exp\left(-\frac{1}{2}Bx^2\right) V(t, u), \quad E_y^+ = -iE_x^+ \implies a_x^1 = -a_y^2 = \exp\left(-\frac{1}{2}Bx^2\right) \text{Re}V, \quad a_x^2 = a_y^1 = \exp\left(-\frac{1}{2}Bx^2\right) \text{Im}V, \quad (4.30)$$

在得到 $a_{x,y}^{1,2}$ 的关系式时,我们应用了这些扰动模式为实函数的性质;同时,我们恢复了 $E_{x,y}^+$ 对时间的依赖,而且 $V(t,u) \propto e^{-i\omega t}\phi(u)$ 。正如之前所述,扰动模式只依赖于坐标 u, t, x ,从上述论证中可知足够大磁场下扰动 $a_{x,y}^{1,2}$ 会出现不稳定性,其作用量(这里只考虑了 a_x^1, a_y^2 这两个扰动模式,而且保留到这些扰动的二阶项)在对空间方向 x, y, z 积分之后为

$$S_2 \propto \int du dt g^{xx} [g^{tt} (\partial_t \text{Re}V)^2 + g^{uu} (\partial_u \text{Re}V)^2 - 4B g^{yy} (\text{Re}V)^2], \quad (4.31)$$

可见,模式 $\text{Re}V$ 的有效质量平方为 $m_{\text{eff}}^2 = -4B g^{yy} B$,当磁场足够大时,它将超越渐近AdS时空中的Breitenlohner-Freedman下限[93]而使得该模式成为一个不稳定的快子。

上面的论述中假设引力几何的背景度规是空间各向同性的(特别是在 x, y 方向上),而且我们只考虑了静态度规情形,它相应于平衡态附近的对偶场论;因此,上述分析与结论具有一般性:足够大的磁场会触发渐近AdS时空中的Einstein-Yang-Mills系统的不稳定性;而且,与上一章中讨论的化学势诱导的全息超导情形类似,为了在较大磁场情形下稳定该引力系统需要模式 $E_{x,y}^{+,-}$ 产生凝聚从而破坏剩余规范对称性 $U(1)_3$,而且基态是一个与空间相关的,即具有空间非齐次性。因此,足够大的磁场会使得渐近AdS时空中的Einstein-Yang-Mills理论对偶于空间非齐次性的全息超导态,该基态的建立将在下一节有详细的论述。

为了确定该系统出现不稳定性时对应的临界磁场值 B_c ,我们需要求解满足一定边界条件的微分方程(4.29)。对于Schwarzschild-AdS₅和硬墙截断的AdS₅这两种时空需要区别处理,这是由于在bulk中的红外区 $u \rightarrow u_h$ 或者 $u \rightarrow u_c$ 附近,需要对扰动模式加以不同的边界条件。首先考虑硬墙截断的AdS₅度规,它曾被用于研究强子物理相关的现象并得到有趣的结论,微分方程(4.29)可表达为

$$\partial_u^2 \phi - \frac{1}{u} \partial_u \phi + (\tilde{\omega}^2 + \tilde{B}^2) \phi = 0, \quad (4.32)$$

其中,无量纲化的频率 $\tilde{\omega}$ 和磁场 \tilde{B} 定义为 $\tilde{\omega} = \omega u_c$, $\tilde{B} = B u_c^2$,截断 u_c 相应于低能QCD中的强子谱的特征能标,即 $\Lambda_{\text{QCD}} \sim 1/u_c$ 。在上述方程中,我们已经将度规(4.4)中的径向坐标做变换 $u \rightarrow u/u_c$,因此 $u = 1$ 相应于硬墙截断处,而 $u = 0$ 相应于该时空的共形边界处。幸运的是,方程(4.32)可以解析求解,而

且它的一般解是两个相互线性独立的贝塞尔函数的叠加，

$$\phi(u) = C'_1 u J \left[1, \sqrt{\tilde{\omega}^2 + \tilde{B}^2 u} \right] + C'_2 u Y \left[1, \sqrt{\tilde{\omega}^2 + \tilde{B}^2 u} \right]. \quad (4.33)$$

为了计算渐近AdS时空中扰动的准正则模式，在共形边界处对扰动需要加上Dirichlet边界条件，

$$\phi(u \rightarrow 0) \rightarrow 0 \implies C_2 = 0 \implies \phi(u) = u J \left[1, \sqrt{\tilde{\omega}^2 + \tilde{B}^2 u} \right], \quad (4.34)$$

上式中，我们取归一化因子 $C'_1 = 1$ 。然而，在硬截断 $u = 1$ 处，我们要求扰动满足Neumann边界条件[59]，

$$\partial_u \phi(u)|_{u=1} = 0 \implies J \left[0, \sqrt{\tilde{\omega}^2 + \tilde{B}^2} \right] = 0. \quad (4.35)$$

因此，临界磁场是零阶 J 型贝塞尔函数 $J[0, z]$ 的零点，而且，最小的临界磁场相应于 $J[0, z]$ 的第一个非平庸的零点： $\tilde{B}_c \approx 5.8$ 。随着磁场的增加，准正则模式的移动趋势描绘在示意图4.1中的左边子图：当磁场 $B = 0$ 时，最低的准正则模式为 $\tilde{\omega} = \pm 2.40483$ ，它实际上是一个正则模式；磁场强度从零增加时，该正则模式沿实轴向原点移动；在临界磁场 \tilde{B}_c 处，该正则模式 $\omega = 0$ ，相应地，该系统将进入不稳定区。

对于Schwarzschild-AdS₅黑洞度规，方程(4.29)有如下明显的形式

$$\partial_u^2 \phi + \left(\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{1}{u} \right) \partial_u \phi + \left(\frac{\tilde{\omega}^2}{f^2(u)} + \frac{\tilde{B}}{f(u)} \right) \phi = 0, \quad (4.36)$$

其中， $\tilde{\omega} = \omega u_h = \omega / (\pi T)$ ， $\tilde{B} = B u_h^2 = B / (\pi T)^2$ ， $f(u) = 1 - u^4$ 。为了计算渐近AdS黑洞中扰动的准正则模式，扰动 $\phi(u)$ 在黑洞视界处满足入射波边界条件，而它在共形边界处满足Dirichlet边界条件：

$$\phi(u \rightarrow 1) \propto (1 - u^4)^{-i\tilde{\omega}/4}, \quad \phi(u \rightarrow 0) = 0. \quad (4.37)$$

当 $\tilde{B} = 0$ 时，扰动的准正则模式在文献[132]有系统的研究，可近似的写成 $\omega_n \approx n(\pm 2 - 2i)$ (n 为正整数)。当磁场 B 的强度逐渐增加时，其第一个准正则模式在频率的复平面上的移动描绘在示意图4.1中的右边子图中。这两个最低阶的准正常模式首先在复平面的虚轴融合为一，然后一个极点沿虚轴朝下移动，另一个沿虚轴朝下移动；而且，朝上移动的极点最终在临界磁场 $\tilde{B}_c = 5.15$ 处穿过实轴而进入上半平面，这标志着这系统进入不稳定区。

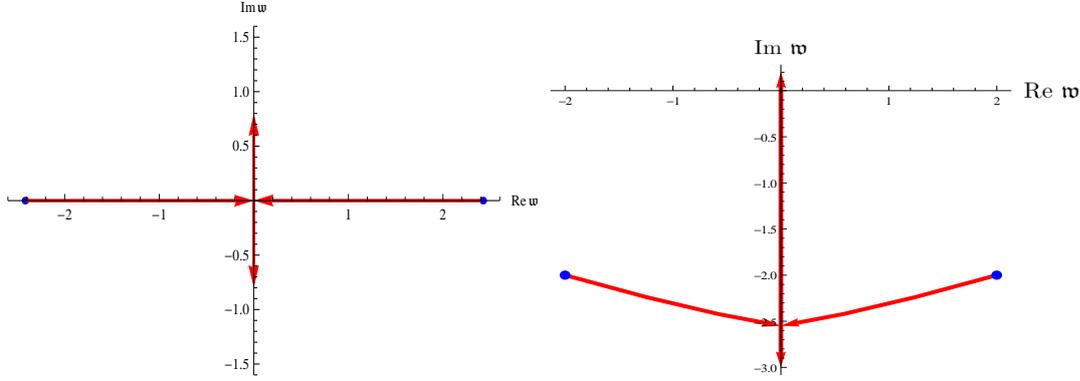


图 4.1: 增加磁场 B 的强度时准正则模式在频率的复平面上的移动。左图是硬墙截断的 AdS_5 模型下的结果, 触发系统进入不稳定区的临界磁场为 $\tilde{B}_c = 5.8$ 。右图是在Schwarzschild- AdS_5 黑洞背景下的结果, 在临界磁场 $\tilde{B}_c = 5.15$ 时系统进入不稳定区。右图取自文献[126]。

4.2 磁场诱导的超导体

上一节中已经证明, 当磁场 B 的强度超过其临界值 B_c 时, 渐近 AdS_5 时空中的Einstein-Yang-Mills理论中非阿贝尔规范场只有背景 $A_y^3 = Bx$ 时具有不稳定性, 需要额外地给规范场 A_M^a 背景值以使其稳定; 若进一步的要求这些背景场在规范/引力对偶的意义上是无源的, 那么该基态下bulk中的剩余规范对称性 $U(1)_3$ 自发破缺, 类似于超导相变。本节将详细阐述这一基态的构建。

4.2.1 规范场微扰展开

为了得到关于规范场背景自洽的运动方程, 对 A_M^a 取如下一般化假设

$$A = \sum_{a=1,2,3; M=x,y} A_M^a(x, y, u) \tau^a dx^M, \quad \tau^a = \frac{1}{2} \sigma^a, \quad (4.38)$$

这里, σ^a 是Pauli矩阵。从下文的论述中我们可以看出: 关掉这些场对于坐标 t, z 的依赖是合理的; 其中, 关掉这些背景规范场对于时间的依赖保证基态是一个静态解, 而关掉它们对于空间 z 的依赖将会使得这个基态成为 xy 平面上的栅格结构。

将公式(4.38)代入到Yang-Mills方程(4.5)中可得9个以 x, y, u 为宗量的相互耦合的偏微分方程: 其中的6个是关于规范场 $A_{x,y}^{1,2,3}$ 的动力学方程, 剩下的3个

是由于径向规范 $A_u^a = 0$ 的选取而导致的限制方程。在求解这些耦合的偏微分方程时，我们主要根据文献[133, 134]给出的方案，在临界磁场 B_c 附近对这些耦合方程做半解析处理。当磁场强度 B 在临界值 B_c 之下时，规范场构型 $A_y^3 = Bx, A_x^3 = 0$ 以及 $A_{x,y}^{1,2} = 0$ 是Yang-Mills方程(4.5)的解，而且根据上节的论述可知它们是微扰稳定的，这相当于超导体的正常相。当增加磁场 B 的强度到临界值 B_c 之上时，系统的基态应是公式(4.38)中的所有规范场分量都有非平庸的形状，我们将其称为超导相。当 $B > B_c$ 却又无限接近 B_c 时，超导相的凝聚无限小，因此，我们可以对公式(4.38)中所有规范场分量按照无穷小参数 $\epsilon \sim \frac{B-B_c}{B_c}$ 做微扰展开。为了明显地展示在建立这个超导基态过程中使用的微扰技术，我们将明显保留 ϵ 在各个模式的展开中，在具体数值计算中将这个参数吸收到各微扰阶的结果中。最一般地情形，我们可以将公式(4.38)中的各分量写成如下形式

$$\begin{aligned} A_y^3 &= xB + \epsilon A_y^{3(1)} + \epsilon^2 A_y^{3(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \\ A_M^a &= \epsilon A_M^{a(1)} + \epsilon^2 A_M^{a(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (a, M) \neq (3, y), \end{aligned} \quad (4.39)$$

我们可以在微扰论的每一级求解 $A_M^{a(i)}$ 。

在渐近 AdS_5 时空中，公式(4.38)中各个分量在共形边界 $u = 0$ 处可展开成如下形式，

$$\begin{aligned} A_{x,y}^3|_{u \rightarrow 0} &= s_{x,y}^3 + v_{x,y}^3 u^2 + \mathcal{O}(u^3), \\ A_{x,y}^{1,2}|_{u \rightarrow 0} &= s_{x,y}^{1,2} + v_{x,y}^{1,2} u^2 + \mathcal{O}(u^3), \end{aligned} \quad (4.40)$$

根据公式(1.54)所示的全息对偶方案可知，上述展开式中的系数 $s_{x,y}^{1,2,3}$ 是 $A_{x,y}^{1,2,3}$ 的边界场论对偶算符的源，而 $v_{x,y}^{1,2,3}$ 则是这些对偶算符的真空期望值。具体来说， $s_{x,y}^3$ 相应于外加的磁场强度，而 $v_{x,y}^3$ 是磁化强度； $s_{x,y}^{1,2}$ 是超导凝聚算符的源，而 $v_{x,y}^{1,2}$ 是超导凝聚算符的真空期望值。对于分量 $A_{x,y}^3$ ，我们设定边界条件使得所加的外磁场不受到高阶微扰的修正，磁化强度却是非零的。为了使得剩余规范对称性 $U(1)_3$ 是自发破缺的，我们要求 $s_{x,y}^{1,2} = 0$ 从而使得这些非零的超导凝聚是无源的。对于Schwarzschild- AdS_5 黑洞，我们要求规范场的这些分量在黑洞视界处是正规的，而对于硬墙截断的 AdS_5 几何则要求规范场的这些分量在截断处遵循Neumann边界条件。

从Ginzburg-Landau自由能(3.4)出发可以导出Ginzburg-Landau方程。按照

文献[133, 134]中的符号习惯, 这一组方程可写为下面的形式

$$\left(-i\nabla - \vec{A}\right)^2 \psi - \psi + |\psi|^2 \psi = 0, \quad (4.41)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = -i(\bar{\psi} \nabla \psi - \psi \nabla \bar{\psi}) - |\psi|^2 \vec{A}, \quad (4.42)$$

正如在3.1一节中所述, 公式(4.41,4.42)中的 ψ 是Cooper对的波函数, \vec{A} 是电磁矢量势。由于上述方程的结构是我们所关心的, 因此在上面展示的方程中忽略了一些无关紧要的系数。

规范场分量 $A_{x,y,u}^{1,2,3}$ 所满足的9个运动方程可分为两组, 分别与上述的两个Ginzburg-Landau方程对应。其中, 第一组方程由非阿贝尔规范场的分量 $A_{x,y,u}^{1,2}$ 遵循的6个方程组成, 这里将其称为凝聚方程, 它们相应于Ginzburg-Landau方程中的(4.41)。在 $A_{x,y,u}^{1,2}$ 满足的6个方程中, 分量 $A_{x,y}^{1,2}$ 相应的二阶微分方程是动力学的, 而 $A_u^{1,2}$ 给出的由于径向规范选取而导致的限制。定义 $U(1)_3$ 下规范协变态 $E_{x,y} = A_{x,y}^1 + iA_{a,y}^2$ 将使得这6个方程变成3个复化的方程: 其中两个相应于 $E_{x,y}$ 的动力学, 另一个是联系 E_x 与 E_y 的限制方程。这样, 只剩下一个复的自由度, 可与方程(4.41)中的波函数 ψ 相类比, 描述超导凝聚强度。虽然上面阐述的类比在非微扰论层次上不是很明显, 在超导相变附近我们可以对规范场的这些分量采取微扰处理, 我们将会清晰的看出这一类比。用复化的限制方程可将这两个复化的动力学方程约化为一个独立的二阶微分方程。

第二组由分量 $A_{x,y,u}^3$ 满足的方程组成, 这里将其简称为磁场方程, 它们与Ginzburg-Landau方程中的(4.42)对应, 而且分量 $A_{x,y,u}^3$ 与电磁矢量势 \vec{A} 相类比。利用径向规范 $A_u^3 = 0$ 导致的限制方程可以使 A_x^3 与 A_y^3 满足的方程在微扰论的每一阶相互解耦。

由于Yang-Mills场方程(4.5)的非线性结构特征, 即使在微扰展开的方案下这些方程的求解依然是非常困难的。考虑 $A_u^3 = 0$ 的规范选取导致的限制方程

$$-A_x^2 \partial_u A_x^1 - A_y^2 \partial_u A_y^1 + A_x^1 \partial_u A_x^2 + A_y^1 \partial_u A_y^2 + \partial_y \partial_u A_y^3 + \partial_x \partial_u A_x^3 = 0. \quad (4.43)$$

在这个限制方程中, 磁场分量 $A_{x,y}^3$ 是以线性项出现的, 而凝聚分量 $A_{x,y}^{1,2}$ 是以二次方项出现的。这一特点表明凝聚分量 $A_{x,y}^{1,2}$ 微扰展开的奇数阶会影响磁场分量 $A_{x,y}^3$ 微扰展开的偶数阶, 因此, 我们可以将公式(4.39)展示的各分量的微扰

展开限制为如下形式

$$\begin{aligned} A_y^3 &= xB + \epsilon^2 A_y^{3(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^4), \\ A_x^3 &= \epsilon^2 A_x^{3(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^4), \\ E_{x,y} &= \epsilon E_{x,y}^{(1)} + \epsilon^3 E_{x,y}^{(3)} + \mathcal{O}(\epsilon^5), \end{aligned} \quad (4.44)$$

即：磁场分量 $A_{x,y}^3$ 的展开中只保留参数 ϵ 的偶数阶项，凝聚分量 $A_{x,y}^{1,2}$ 的展开中只保留参数 ϵ 的奇数阶项。在这个微扰展开方案下，凝聚分量和磁场分量在微扰论的每一阶都是相互退耦的。我们可以按照下列顺序求解这些分量场：首先在 ϵ 的线性阶求解凝聚分量 $E_{x,y}^{(1)}$ ，然后将其作为磁场分量的第二阶 $A_{x,y}^{3(2)}$ 所满足运动方程的源进一步求解 $A_{x,y}^{(2)}$ ，这些磁场分量的二阶项又作为 $E_{x,y}^{(3)}$ 所满足运动方程的源，依此类推到微扰论的每一阶。

在微扰论的线性阶，凝聚分量 $E_{x,y}^{(1)}$ 的形状由如下方程决定

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x \partial_u E_x^{(1)} + \partial_y \partial_u E_y^{(1)} + iBx \partial_u E_y^{(1)}, \\ 0 &= \partial_u^2 E_x^{(1)} + \partial_u \ln(\sqrt{-g} g^{uu} g^{xx}) \partial_u E_x^{(1)} + \frac{g^{yy}}{g^{uu}} \partial_y (\partial_y E_x^{(1)} - \partial_x E_y^{(1)} + \\ &\quad iBx E_x^{(1)}) + \frac{g^{yy}}{g^{uu}} iB E_y^{(1)} + \frac{g^{yy}}{g^{uu}} Bx (i\partial_y E_x^{(1)} - i\partial_x E_y^{(1)} - Bx E_x^{(1)}), \\ 0 &= \partial_u^2 E_y^{(1)} + \partial_u \ln(\sqrt{-g} g^{uu} g^{yy}) \partial_u E_y^{(1)} + \frac{g^{xx}}{g^{uu}} \partial_x (\partial_x E_y^{(1)} - \partial_y E_x^{(1)} - \\ &\quad iBx E_x^{(1)}) - \frac{g^{xx}}{g^{uu}} iB E_x^{(1)}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

选取适当的边界条件，这一组偏微分方程可以解析求解。对公式(4.45)中的第一个方程关于坐标 u 积分可得：

$$\partial_x E_x^{(1)} + \partial_y E_y^{(1)} + iBx E_y^{(1)} = 0, \quad (4.46)$$

在得到上述的限制方程时考虑到 $U(1)_3$ 对称性是自发破缺的而在共形边界处要求 $E_{x,y}^{(1)}(u \rightarrow 0) = 0$ 。对 $E_{x,y}^{(1)}$ 关于 y 方向取平面波假设 $E_{x,y}^{(1)} \sim e^{-inky}$ 并代入限制方程(4.46)可知

$$E_y^{(1)} = \frac{1}{ink - iBx} \partial_x E_x^{(1)}, \quad n \in N. \quad (4.47)$$

因此，耦合的方程组(4.45)约化为如下的一个独立方程

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_u^2 E_x^{(1)} + \partial_u \ln(\sqrt{-g} g^{uu} g^{xx}) \partial_u E_x^{(1)} + \frac{g^{yy}}{g^{uu}} \times \\ &\quad \left(\partial_x^2 E_x^{(1)} + \frac{2B}{nk - Bx} \partial_x E_x^{(1)} - (nk - Bx)^2 E_x^{(1)} \right). \end{aligned} \quad (4.48)$$

利用上一节的分离变量法可求得上述偏微分方程的通解

$$E_x^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp \left\{ -inky - \frac{1}{2} B \left(x - \frac{nk}{B} \right)^2 \right\} \mathcal{U}(u), \quad E_y^{(1)} = -iE_x^{(1)}, \quad (4.49)$$

其中, 径向函数 $\mathcal{U}(u)$ 是下述常微分方程满足一定边界条件的解

$$\partial_u^2 \mathcal{U}(u) + \partial_u \ln(\sqrt{-g} g^{uu} g^{xx}) \partial_u \mathcal{U}(u) + \frac{g^{yy}}{g^{uu}} B_c \mathcal{U}(u) = 0. \quad (4.50)$$

在应用分量变量法得到上述这些方程时, 我们要求 $E_x^{(1)}$ 在空间无穷远处 $x \rightarrow \pm\infty$ 有限, 而且为了研究系统的基态我们将分离变量过程所得到的常数取为 B 。在 AdS_5 黑洞时空中, 径向函数 $\mathcal{U}(u)$ 只能数值求解; 对于硬墙截断的 AdS_5 时空, $\mathcal{U}(u)$ 是贝塞尔函数。然而, 数值计算显示这两种渐近 AdS_5 时空下的超导相基态在基本性质上是一致的。

由于在微扰论线性阶微分方程(4.45)的齐次性, 参数 C_n 的尺度是没有意义的。同时, 在微扰论的线性阶不同参数 $\{C_n, k\}$ 的选取所指定的不同形状的栅格的自由能是简并的。为了将这些格子的简并解除, 需要进一步研究高阶微扰展开中的相互作用项。在微扰展开的第二阶 $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, 径向规范 $A_u^{3(2)} = 0$ 导致如下限制方程,

$$\partial_u \partial_x A_x^{3(2)} + \partial_u \partial_y A_y^{3(2)} = 0 \implies \partial_x A_x^{3(2)} + \partial_y A_y^{3(2)} = 0, \quad (4.51)$$

在得到公式(4.51)中的第二式时, 我们要求磁场分量的高阶修正不改变外加磁场的强度而将该积分常数取为零。利用公式(4.51)可将磁场分量展开的二阶项所满足的运动方程解耦,

$$\begin{aligned} 0 = & \partial_u^2 A_x^{3(2)} + \partial_u \ln(\sqrt{-g} g^{uu} g^{xx}) \partial_u A_x^{3(2)} + \frac{g^{yy}}{g^{uu}} (\partial_x^2 + \partial_y^2) A_x^{3(2)} + \frac{g^{yy}}{g^{uu}} \times \\ & \left[\frac{3}{2} E_x^{(1)} \partial_y \bar{E}_x^{(1)} + \frac{3}{2} \bar{E}_x^{(1)} \partial_y E_x^{(1)} + \frac{i}{2} \bar{E}_x^{(1)} \partial_x E_x^{(1)} - \frac{i}{2} E_x^{(1)} \partial_x \bar{E}_x^{(1)} \right], \\ 0 = & \partial_u^2 A_y^{3(2)} + \partial_u \ln(\sqrt{-g} g^{uu} g^{yy}) \partial_u A_y^{3(2)} + \frac{g^{xx}}{g^{uu}} (\partial_x^2 + \partial_y^2) A_y^{3(2)} - \frac{g^{xx}}{g^{uu}} \times \\ & \left[Bx + \frac{3}{2} E_x^{(1)} \partial_x \bar{E}_x^{(1)} + \frac{3}{2} \bar{E}_x^{(1)} \partial_x E_x^{(1)} - \frac{i}{2} \bar{E}_x^{(1)} \partial_y E_x^{(1)} + \frac{i}{2} E_x^{(1)} \partial_y \bar{E}_x^{(1)} \right], \end{aligned} \quad (4.52)$$

其中, 方程中出现的 $\bar{E}_x^{(1)}$ 是 $E_x^{(1)}$ 的复共轭。文献[135]指出: 为了使得超导基态具有栅格结构, 参数 C_n 应该有相同的幅度且具有一定的周期性 $C_n = C_{n+P}$ 。因

此, 利用微扰展开在线性阶的结果(4.49) 可知非齐次方程(4.52)的源在 xy 平面上具有如下的周期性

$$x \sim x + \frac{Pk}{B}, \quad y \sim y + \frac{2\pi}{k}, \quad (4.53)$$

其中, 整数 P 是系数 C_n 的周期, 即 $C_n = C_{n+P}$ 。因此, 我们期望磁场分量 $A_{x,y}^{3(2)}$ 也具有这样的周期性, 并对其做傅里叶级数展开可得:

$$A_{x,y}^{3(2)} = \sum_m \sum_n \exp \left\{ -i \frac{2\pi m B}{k P} x - i n k y \right\} \tilde{A}_{x,y}^{3(2)}(m, n, u). \quad (4.54)$$

将傅里叶展开式(4.54)代入运动方程(4.52)并经过复杂的代数运算可以得到动量空间的傅里叶模式 $\tilde{A}_{x,y}^{3(2)}$ 满足下面的方程:

$$\begin{aligned} & u \partial_u \left(\frac{f(u)}{u} \partial_u \tilde{A}_{x,y}^{3(2)} \right) - \left(k^2 n^2 + \frac{4m^2 \pi^2 B^2}{k^2 P^2} \right) \tilde{A}_{x,y}^{3(2)} + T_{x,y} \times \\ & \exp \left\{ -\frac{k^2 n^2}{4B} - \frac{m^2 \pi^2 B}{k^2 P^2} + i \frac{m n \pi}{P} \right\} \left(\sum_{l=0}^{P-1} e^{i 2 l m \pi / P} \bar{C}_l C_{l+n} \right) \mathcal{U}^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.55)$$

在得到方程(4.55)时我们使用了度规(4.4)的分量形式。方程(4.55)中的因子 $T_{x,y}$ 为

$$T_x = -i \frac{\sqrt{B\pi}}{P} n, \quad T_y = 2i \frac{(B\pi)^{3/2}}{k^2 P^2} m.$$

在规范场微扰展开的第三阶 $\mathcal{O}(\epsilon^3)$, 凝聚分量 $E_{x,y}^{(3)}$ 的行为由下列耦合的偏微

分方程决定

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_x \partial_u E_x^{(3)} + \partial_y \partial_u E_y^{(3)} - i E_x^{(1)} \partial_u A_x^{3(2)} + i A_x^{3(2)} \partial_u E_x^{(1)} - \\
&\quad E_x^{(1)} \partial_u A_y^{3(2)} + i B x \partial_u E_y^{(3)} + A_y^{3(2)} \partial_u E_x^{(1)}, \\
0 &= \partial_u^2 E_x^{(3)} + \partial_u \ln(\sqrt{-g} g^{uu} g^{xx}) \partial_u E_x^{(3)} + \frac{g^{yy}}{g^{uu}} \partial_y [\partial_y E_x^{(3)} - \partial_x E_y^{(3)} - \\
&\quad E_x^{(1)} A_x^{3(2)} + i B x E_x^{(3)} + i A_y^{3(2)} E_x^{(1)}] + \frac{g^{yy}}{g^{uu}} \times \\
&\quad \left[-E_x^{(1)} \partial_y A_x^{3(2)} + i B E_y^{(3)} + E_x^{(1)} \partial_x A_y^{3(2)} - (E_x^{(1)})^2 \bar{E}_x^{(1)} \right] + \frac{g^{yy}}{g^{uu}} \times \\
&\quad [i B x \partial_y E_x^{(3)} + i B x \partial_y E_x^{(1)} - i B x \partial_x E_y^{(3)} - A_y^{3(2)} \partial_x E_x^{(1)} - \\
&\quad i B x A_x^{3(2)} E_x^{(1)} - (B x)^2 E_x^{(3)} - 2 B x A_y^{3(2)} E_x^{(1)}], \tag{4.56} \\
0 &= \partial_u^2 E_y^{(3)} + \partial_u \ln(\sqrt{-g} g^{uu} g^{yy}) \partial_u E_y^{(3)} + \frac{g^{xx}}{g^{uu}} \partial_x [\partial_x E_y^{(3)} - \partial_y E_x^{(3)} - \\
&\quad i B x E_x^{(1)} - i E_x^{(1)} A_y^{3(2)} + A_x^{3(2)} E_x^{(1)}] + \frac{g^{xx}}{g^{uu}} \times \\
&\quad \left[-i B E_x^{(3)} - i E_x^{(1)} \partial_x A_y^{3(2)} + i E_x^{(1)} \partial_y A_x^{3(2)} + i (E_x^{(1)})^2 \bar{E}_x^{(1)} \right] + \frac{g^{xx}}{g^{uu}} \times \\
&\quad [A_x^{3(2)} \partial_x E_x^{(1)} - i A_x^{3(2)} \partial_y E_x^{(1)} + B x A_x^{3(2)} E_x^{(1)}].
\end{aligned}$$

这里已假设凝聚分量在微扰展开的第三阶与线性阶对 x, y 有相同的依赖行为

$$\begin{aligned}
E_x^{(3)} &= \sum_n C_{x,n}(u) \exp \left\{ -i n k y - \frac{1}{2} B \left(x - \frac{n k}{B} \right)^2 \right\}, \\
E_y^{(3)} &= \sum_n C_{y,n}(u) \exp \left\{ -i n k y - \frac{1}{2} B \left(x - \frac{n k}{B} \right)^2 \right\}. \tag{4.57}
\end{aligned}$$

将公式(4.57)代入运动方程(4.56)并经过一些代数运算可以将 $E_x^{(3)}$ 与 $E_y^{(3)}$ 的耦合解开: 系数 $C_{y,n}(u)$ 满足的二阶线性非齐次常微分方程和一个关于 $C_{x,n}(u), C_{y,n}(u)$ 的限制方程, 其中, $C_{y,n}(u)$ 的二阶微分方程与磁场分量的方程(4.55)具有相似行为。为简洁起见, 这里不再详述叙述这些方程的表达式, 相关内容可参考文献[128]。

在规范场微扰展开的第二、三阶, 可以将上述这些退偶的微分方程统一的写为下面的形式:

$$u \partial_u \left(\frac{f(u)}{u} \partial_u \mathcal{S} \right) + G(m, n) \mathcal{S} + H(m, n, u) = 0, \tag{4.58}$$

其中, 函数 \mathcal{S} 代表 $C_{y,n}(u), \tilde{A}_{x,y}^{3(2)}$ 。这是一个非齐次的二阶常微分方程, 可以用如下数值方法求解: 对于特定的格子形状, 指定参数 C_n, k 的选取, 运用试射法对该方程从 $u = 1$ 到 $u = 0$ 做数值积分可求得 \mathcal{S} , 积分常数可以通过适当的边界条件来确定:

$$\partial_u \mathcal{S}(u = 1), \quad \mathcal{S}(u = 0) = 0, \quad (4.59)$$

其中, 对于黑洞视界 $u = 1$ 处我们要求规范场的各分量满足正规性条件, 对于硬墙截断处 $u = 1$ 我们则要求 \mathcal{S} 满足Neumann边界条件; 在共形边界处要求规范场的这些模式是无源的, 一方面这保证了外加磁场是恒定的, 另一方面这也使得凝聚是自发生成的, 即 $U(1)_3$ 对称性是自发破缺的。运用试射法数值求解上述方程时, 我们通过调整 $\mathcal{S}(u = 1)$ 的值而使所得数值结果 $\mathcal{S}(u)$ 满足边界条件 $\mathcal{S}(u = 0) = 0$, 这与上一章中建立全息超导基态时所用的数值方法是相似的。由于这时需要处理非齐次的常微分方程, 它的源项隐含了可与 $\mathcal{S}(u = 1)$ 相比较的尺度, 因此, $\mathcal{S}(u = 1)$ 相当于一个可调节参数以使得微分方程的解满足紫外区的限制。规范场分量的不同傅里叶模式相应于不同整数 m, n 的选取, 对于所有的这些非齐次方程, 我们可以运用上面描述的数值方法在选定整数 m, n 后求解它们。幸运的是, 数值上我们不需要做很多次这样的计算: 当整数 m, n 逐渐增大时, 这些非齐次微分方程的源项由于指数压低而变得可以忽略。结合前面提到的无源边界条件可以得出如下结论: 当整数 m, n 足够大时, 方程(4.58)只有平庸的零解。实际上, 我们在具体的数值计算时只需将这些傅里叶级数展开截断到 $m, n \approx 3$ 。

4.2.2 数值结果与讨论

如果忽略径向函数 $U(u)$ 的影响, 凝聚分量在微扰论线性阶的结果(4.49)与第二类超导体中序参量在较大临界磁场附近的行为完全一致[134], 而且它也与文献[127]发现的大磁场下超导QCD真空的线性阶结果一致。公式(4.49)中的参数 C_n, k 需要通过进一步研究微扰展开的高阶效应来确定, 根据这两个参数的不同取值, 凝聚分量 $E_{x,y}^{(1)}$ 相应于 x, y 平面上不同的非齐性函数。然而, 当系数 C_n 具有一定的周期性, 即凝聚分量在 x, y 平面上形成一定的栅格结构时是最值得研究的, 它们代表沿 z 方向上均匀分布的超导涡旋结构, 与凝聚态物理中相关现象直接关联。文献中习惯性地将近线性阶的结果(4.49)称为Abrikosov解, 而且从这个线性阶的解出发构建特定的栅格结构在综述[135]中

有详细的论述。该文章指出：为了使 $|E_{x,y}^{(1)}|$ 是一个栅格解，系数 C_n 不仅具有相同的幅度，而且还有一定的周期性，即 $C_n = C_{n+P}$ (P 是整数)。

Abrikosov在文献[133]中首先考虑了最简单的情形—正方栅格： $C_n = C$ 且 $k = \sqrt{2\pi B}$ ，并将这种栅格结构作为第二类超导体在较大临界磁场附近的基态。后来的研究表明第二类超导体真正的基态是一个三角格子，但是这两种格子下系统的自由能非常接近。文献 [136]将[133]的研究推广到 $P = 2$ 且 $C_1 = \pm iC_0 = \pm iC$ 的情形，这样的参数选取对应于一般化的菱形格子，且它的形状由参数 k 决定。当 $k = \sqrt{\pi B}$ 时，该栅格成为正方形格子，与文献[133]中研究正方形格子是一致的，只是被转动了 $\pi/4$ 角度。当参数 $k = 3^{1/4}\sqrt{\pi B}$ 时，它是一个三角格子。为了更清晰的显示这种菱形的格子，将 $P = 2, C_n = iC_0 = iC$ 代入到Abrikosov解(4.49)中可得

$$E_x^{(1)} = C \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \frac{n^2 \pi}{2} - ink y - \frac{1}{2} B \left(x - \frac{nk}{B} \right)^2 \right\} \mathcal{U}(u). \quad (4.60)$$

不难验证 $|E_x^{(1)}(x + (m + 1/2q)L_x, y + (n + 1/2q)L_y)| = |E_x^{(1)}(x, y)|$ ， m, n, q 都是整数， $L_x = 2k/B$ ， $L_y = 2\pi/k$ 分别是格子的元胞在 x, y 方向上的长度。图4.2示意性的描绘了这样的一个栅格元胞结构。

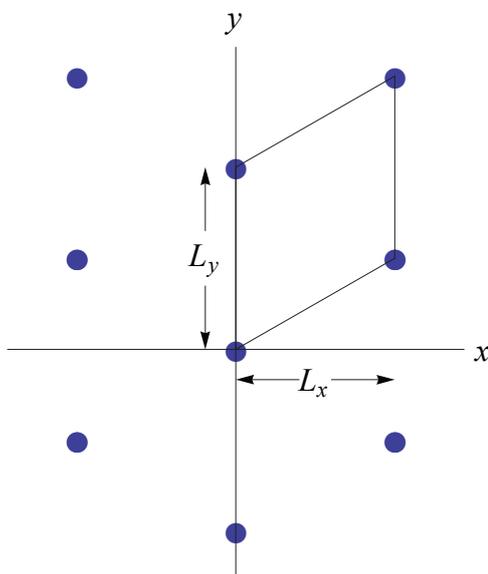


图 4.2: 菱形的栅格元胞结构示意图。

为了确定超导相基态的栅格形状，我们需要计算特定参数组合下系统的自

由能。一般来说此自由能是发散的，需要利用全息重整化技术来消除发散；然而，我们可以计算超导相与正常相间的自由能之差而免于重整化。根据全息对偶方案，超导相与正常相的能量之差 ΔF 与系统的在壳作用量直接相关，可表达为如下形式：

$$\Delta F = \frac{1}{4e^2} \int d^5x \sqrt{-g} (F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}|_{\text{SC}} - F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}|_{\text{N}}). \quad (4.61)$$

由于超导相具有栅格结构，上式中的积分限制在如下元胞区域

$$0 \leq x < \frac{kP}{B}, \quad 0 \leq y < \frac{2\pi}{k}, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad t, z \in R. \quad (4.62)$$

将 t, z 方向上的积分因子略去，将剩余的积分部分记作 $\Delta\Omega$ ，它是有限的。从示意图4.2可知栅格元胞的面积为 $L_x L_y = 4\pi/B$ ，与参数 k 的选取无关。

定义一般化的系数 $C_{(x,y),n}(u)$ 为

$$\begin{aligned} E_x &= A_x^1 + iA_x^2 = \sum_n C_{x,n}(u) \exp \left\{ -inky - \frac{1}{2}B \left(x - \frac{nk}{B} \right)^2 \right\}, \\ E_y &= A_y^1 + iA_y^2 = \sum_n C_{y,n}(u) \exp \left\{ -inky - \frac{1}{2}B \left(x - \frac{nk}{B} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

能量差 $\Delta\Omega$ 的表达式为

$$\begin{aligned} 4e^2 \Delta\Omega &= \int du \left\{ \Omega_1(u) + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} [\Omega_2(m, n, u) + \Omega_3(m, n, u) + \right. \\ &\quad \left. \Omega_4(m, n, u)] + \sum_{m,n,q,r=-\infty}^{\infty} \Omega_5(m, n, q, r, u) \right\}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

其中， $\Omega_{1,2,3,4,5}$ 的表达式非常复杂，具体形式可参考文献[128]。在数值求解了微分方程(4.58)后，可以从公式(4.64)得到超导相与正常相的能量差。

我们的数值计算主要集中于 $P = 2$ 的情形。通过研究系统的能量最小值可以确定栅格的形状，即参数 C_n, k 的选取。由于在求解规范场各分量时使用的微扰展开方法只有在 $B \sim B_c$ 才是合理的，因此我们主要研究临界磁场 B_c 附近的行为。将系数 C_n 的幅度记为 C ，同时选定参数 k ，将它们代入能量表达式(4.64)可知 $\Delta\Omega$ 可形式化的表达为

$$\Delta\Omega = a_1 \epsilon C + a_2 \epsilon^2 C^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \equiv a_1 C_\epsilon + a_2 C_\epsilon^2 + \mathcal{O}(C_\epsilon^3) \quad (4.65)$$

在上式中的第二个等式中我们将微扰展开参数 ϵ 吸收到 C 中，我们将 C_ϵ 称为超导凝聚强度，它是物理的。 a_1, a_2, \dots 可以通过将方程(4.58)的数值解代入能量密度表达式(4.64)中求得。

在图4.3中，我们分别描绘了超导相与正常相能量差 $\Delta\Omega$ 随超导凝聚强度的变化和凝聚强度 C_ϵ 随外加磁场 B 的变化行为。从左边的子图中可以看出，当外

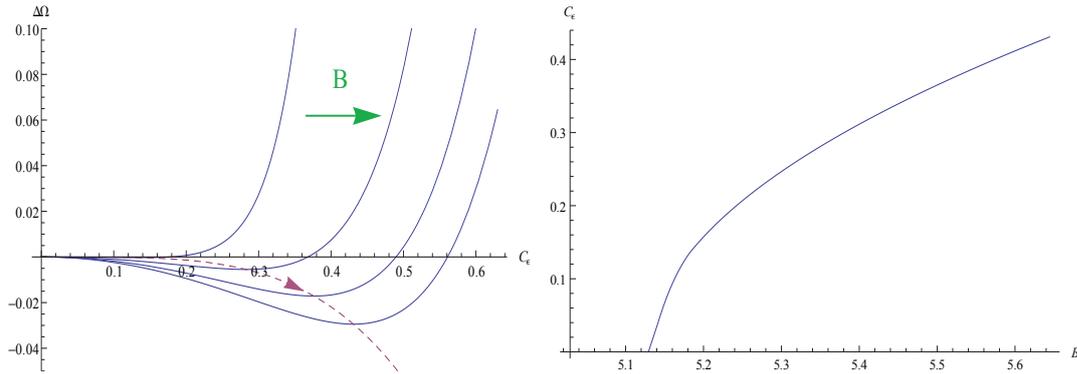


图 4.3: 左图中所示曲线描绘了超导相与正常相能量差 $\Delta\Omega$ 随超导凝聚强度 C_ϵ 的变化，当外加磁场强度 B 增强时，曲线向右移动。右图曲线是超导凝聚强度 C_ϵ 随外加磁场强度 B 的变化行为图。两张图中展示的结果均是在 AdS_5 黑洞几何下得到的，对于硬墙截断的纯 AdS_5 几何， $\Delta\Omega$ 和 C_ϵ 有相似的行为。该图是在正方形格子下的结果。

加磁场强度 B 在临界值 B_c 以上时，随着外加磁场强度 B 的增强， $\Delta\Omega$ 的最小值越来越小，说明磁场强度的增强使系统变得更加稳定，这与上一节的论述是一致的。从右边的子图可知，在临界磁场 B_c 附近超导凝聚强度 C_ϵ 具有平均场理论所预言的平方根行为：

$$\begin{aligned} C_\epsilon &= 0.60 (B - B_c)^{1/2}, & B_c &\approx 5.15 & AdS_5 \text{ 黑洞}, \\ C_\epsilon &= 0.54 (B - B_c)^{1/2}, & B_c &\approx 5.78 & \text{硬墙截断的 } AdS_5, \end{aligned} \quad (4.66)$$

图4.4描绘了三角格子和正方形格子下两相能量差 $\Delta\Omega$ 随外加磁场 B 的变化行为的数值结果。虽然两相能量差 $\Delta\Omega$ 在这两种不同格子下非常接近，但是该数值结果显示与正方格子相比，三角格子的对应的系统基态能量较低。随着参数 C_n 的周期性 P 的增加数值计算的力度变得很强，因此这里仅考虑了 $P \leq 2$ 这两种情形。然而这里的结果与第二类超导体的性质以及文献[127]的结论一致使

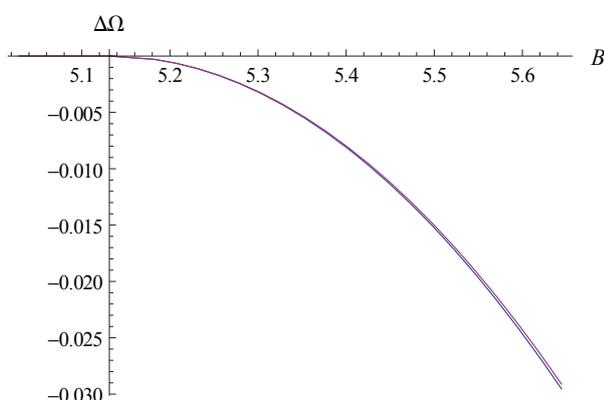


图 4.4: 超导相与正常相能量差 $\Delta\Omega$ 随外加磁场变化的行为。靠上面的红线对应正方形格子的 $\Delta\Omega$ ，下面的蓝线是三角格子的 $\Delta\Omega$ 。

我们有充分的理由相信 $P \geq 3$ 时格子的能量较高，不是系统的基态。因此，这里我们将具有三角格子形状的超导涡旋组成的栅格结构作为系统的基态。从图4.4可看出在临界磁场附近， $\Delta\Omega \sim (B - B_c)^2$ ，这与公式(4.65)展示的超导凝聚的平方根行为结合在一起说明该超导相变是一个二级相变，与上一章中化学势诱导的超导相变情形类似。

为了更清晰的看出超导相的基态是一个三角格子，图4.5中描绘了能量密度差 $\Delta\Omega$ 随栅格尺寸比值 $R = L_x/L_y$ 变化的行为。该图显示，系统的能量密度

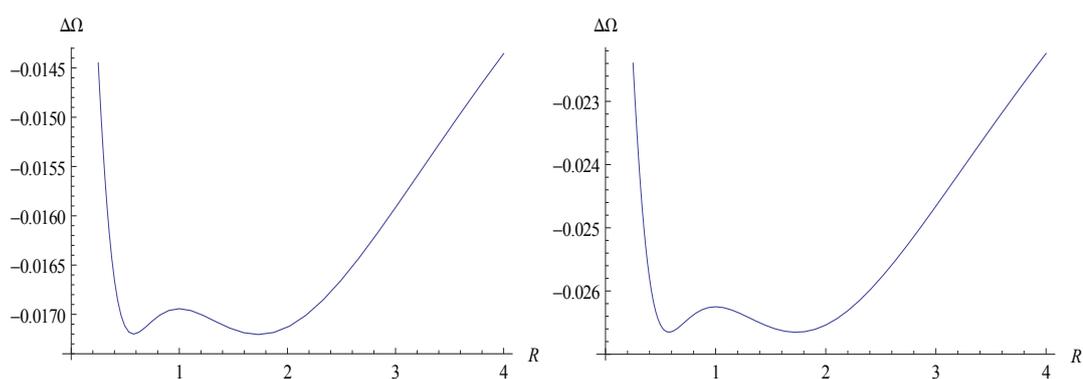


图 4.5: 超导相与正常相能量差 $\Delta\Omega$ 随栅格尺寸比值 $R = L_x/L_y$ 变化的行为图。其中，左图所示是在 AdS_5 黑洞几何下的结果，右图是在硬墙截断的 AdS_5 下的结果。

具有对称性 $\Delta\Omega(R) = \Delta\Omega(1/R)$ ，这是由于 R 和 $1/R$ 给出相同的栅格形状，不

同之处在于 x 与 y 方向的翻转。 $\Delta\Omega(R)$ 在 $R = \sqrt{3}$ 或者 $1/\sqrt{3}$ 处取最小值, 这时参数 $k = 3^{1/4}\sqrt{\pi B}$, 因此系统的基态对应的栅格结构为三角形。在 $R = 1$ 处, 能量密度 $\Delta\Omega$ 有一个局部极大值, 相应于正方形的格子。然而, 正如图4.4中所展示的: $\Delta\Omega$ 的局部极大值与最小值间差别很小。

在系统的最低能量态下, 超导涡旋具有三角格子的形状, 利用全息对偶的方案可以计算超导凝聚的真空期望值。保留到微扰展开的线性阶 $\mathcal{O}(\epsilon)$ 可知

$$\langle J_x^{(1)} \rangle \propto \partial_u^2 E_x^{(1)}|_{u=0} \propto C_\epsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -i \frac{n^2 \pi}{2} + ink y - \frac{1}{2} B \left(x - \frac{nk}{B} \right)^2 \right\}. \quad (4.67)$$

图4.6中描绘了超导凝聚算符的真空期望值的模平方 $|\langle J_x^{(1)} \rangle|^2$ 在 xy 平面上分布的等高线图。实际上, 在能量最小的基态下, 磁化强度与超导凝聚行为类似。

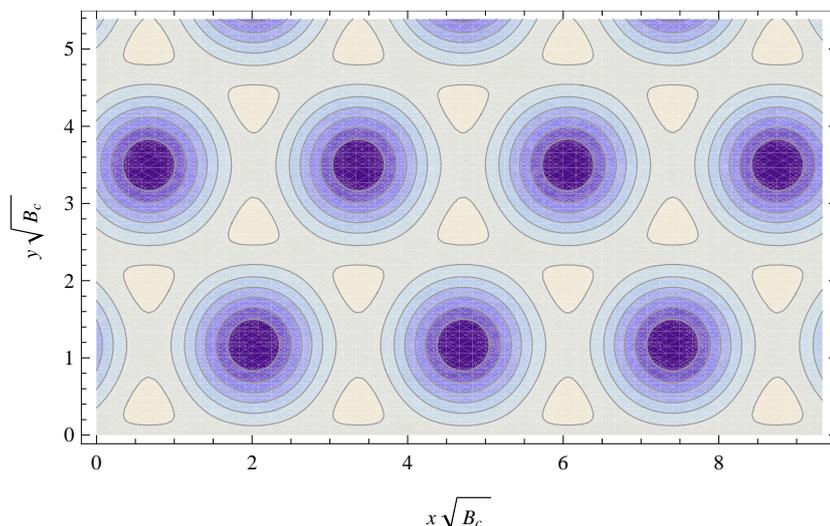


图 4.6: 超导凝聚算符真空期望值的模平方 $|\langle J_x^{(1)} \rangle|^2$ 的空间分布的等高线图, 在每一个超导涡旋结构的中心区(颜色较暗), 凝聚为零。

可见, 足够大磁场的 B 可触发Einstein-Yang-Mills系统的不稳定性, 当 $B > B_c$ 时系统的基态是由三角格子的超导涡旋组成的栅格结构, 该栅格分布于与外加磁场垂直的 xy 平面上, 且该超导涡旋是由带电矢量算符凝聚而产生的, 可作为 p 波超导体的序参量。这与第二类超导体在较大临界磁场附近的行为形似。然而, 超导栅格结构将全息超导相变与全息平移对称性破缺联系起来, 而且这些对称性的破缺都是动力学的, 与文献中手动引入的栅格有本质不同。该超导基态的性质很值得进一步研究。

第五章 结论与展望

在这篇论文中，我简要地介绍了AdS/CFT对应或者更一般形式的规范/引力对偶的主要思想及其建立过程。同时，我也详细地阐述了如何应用该对偶工具研究强耦合物理体系中的一些重要现象，特别是与重离子物理、QCD非微扰能区、凝聚态物理中的高温超导相变以及超导涡旋结构等相关的物理。

第一章简要地总结了规范/引力对偶的基本内容及主要物理思想。该对偶猜想源于对D-brane不同角度的理解：一方面，它是10维时空中具有动力学的客观实体；另一方面，它可以作为第二类超引力的源而诱发孤子解，即所谓的black p -brane解。通过对上述这两种对D-brane的不同描述方式以及各种描述方案适用性的进一步分析，Maldacena在1997年底做出了该对偶猜想。至今，仍然没有一个可行的方案来直接证实这一猜想，这主要由于它是一个强弱对偶。然而，正是这一特点使得它成为一种强有力的数学工具：人们期望规范/引力对偶这一数学工具对理论物理学中强耦合系统的行为研究有所帮助，这也是近年来研究的热点之一。

夸克胶子等离子体是一个强耦合的物理系统，对于它的一些性质的理解直接关系到我们对于QCD非微扰能区的认识。鉴于目前格点方法在研究非微扰QCD理论的诸多缺陷，我们应用引力对偶模型探测了夸克胶子等离子体的一些性质。这主要包括味道物质在该强耦合的近乎理想流体中的输运行为、电磁信号的发射、等离子体的结构函数等。我们的研究进一步表明，利用高能电磁流对等离子体系统做深度非弹性散射可以探测该强耦合系统的内部结构，可以用强子物理中的配分子模型来理解，而且它的结构函数近似的符合Callan-Gross关系式。对于等离子体中自发发射的电磁信号，我们发现引入外磁场可明显使得该信号具有空间各向异性，与实验观测到的等离子体具有各向异性行为这一事实相符。

在第三章中我们研究了两类化学势触发的全息超导相变：一维空间的 p 波全息超导相变和平面的具有Lifshitz临界指数的全息超导相变。虽然这些研究的基本框架与文献中的相类似，但是本文中这两个超导模型有其特殊性，这主要体现在全息方案中对于算符及其源的理解。相应地，我们需要一个全新的计算各物理量的方案。这些类超导相变的基态是与空间无关的，即齐性超导体。然

而，第四章的研究内容告诉我们，足够大的磁场可以触发全息引力系统的不稳定性，而且它的基态是由具有三角格子形状的的超导涡旋组成的栅格结构，而且该栅格是在垂直于磁场的 xy 平面上。这与第二类超导体在较大临界磁场附近的行为形似。

本论文中所陈述的研究内容有其局限性，这主要表现在所选用模型的简单性使得所描述的物理系统过于理想化，这一点也是应用规范/引力对偶这个数学工具的一大障碍。作为未来的研究内容我将在如下一些方向上努力：

(1)构建较实际的AdS/QCD模型，这不仅包括能描述已知的QCD低能区的一些现象，也包括匹配重离子碰撞实验的一些主要结果。一个理想的框架是 $(4 + 1)$ 维时空中的Einstein-Dilaton引力，并在该引力框架内引入手征凝聚的动力学，可用复标量场来全息实现。

(2)在第三章中研究的全息超导体的基础上进一步理解超导相变的本质，特别是超导凝聚对全息费米面的影响。这可以通过在对偶引力中研究费米型算符的关联函数来确定，相关研究正在进行。

(3)第四章中大磁场诱导的超导栅格结构是一个动力学生成的既破坏电磁对称性又破坏平移对称性的系统，而且在微扰展开的第一阶，基态具有解析的形式。该基态的性质值得进一步研究，特别是探测动力学的超导凝聚与栅格结构对于费米面的影响是很有趣的，相关研究正在进行之中。我们发现在微扰展开的零级，费米型算符的能谱给出标准的朗道能级；超导凝聚和动力学栅格效应的探测需要超越零级微扰展开。

(4)文献中考虑的全息模型多侧重于空间各向同性的情形，当空间转动对称性破缺后，虽然物理系统变得复杂，却更接近实际的情况。一个有趣的问题是凝聚态物理中的掺杂会破坏动量空间中圆形的费米面。我将考虑这一问题的全息实现，其关键在于找到各向异性的全息几何，有关内容的初步研究可参考[137, 138]。

参考文献

- [1] G. 't Hooft, “Dimensional reduction in quantum gravity,” [arXiv:gr-qc/9310026 \[gr-qc\]](#).
- [2] R. Bousso, “The Holographic principle,” *Rev.Mod.Phys.* **74** (2002) 825–874, [arXiv:hep-th/0203101 \[hep-th\]](#).
- [3] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv.Theor.Math.Phys.* **2** (1998) 231–252, [arXiv:hep-th/9711200 \[hep-th\]](#).
- [4] E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” *Adv.Theor.Math.Phys.* **2** (1998) 253–291, [arXiv:hep-th/9802150 \[hep-th\]](#).
- [5] O. Aharony, “The NonAdS / nonCFT correspondence, or three different paths to QCD,” [arXiv:hep-th/0212193 \[hep-th\]](#).
- [6] D. Mateos, “String Theory and Quantum Chromodynamics,” *Class.Quant.Grav.* **24** (2007) S713–S740, [arXiv:0709.1523 \[hep-th\]](#).
- [7] E. Iancu, “Partons and jets in a strongly-coupled plasma from AdS/CFT,” *Acta Phys.Polon.* **B39** (2008) 3213–3280, [arXiv:0812.0500 \[hep-ph\]](#).
- [8] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal, and U. A. Wiedemann, “Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions,” [arXiv:1101.0618 \[hep-th\]](#).
- [9] C. P. Herzog, “Lectures on Holographic Superfluidity and Superconductivity,” *J.Phys.* **A42** (2009) 343001, [arXiv:0904.1975 \[hep-th\]](#).
- [10] S. A. Hartnoll, “Lectures on holographic methods for condensed matter physics,” *Class.Quant.Grav.* **26** (2009) 224002, [arXiv:0903.3246 \[hep-th\]](#).

- [11] N. Iqbal, H. Liu, and M. Mezei, “Lectures on holographic non-Fermi liquids and quantum phase transitions,” [arXiv:1110.3814 \[hep-th\]](#).
- [12] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal, *Conformal field theory*. Springer-Verlag, New York, USA, 1997.
- [13] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity*. Princeton University Press, Princeton, USA, 1992.
- [14] S. Weinberg, *The quantum theory of fields. Vol. 3: Supersymmetry*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.
- [15] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys.Rept.* **323** (2000) 183–386, [arXiv:hep-th/9905111 \[hep-th\]](#).
- [16] J. Polchinski, *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998.
- [17] R. C. Myers, “NonAbelian phenomena on D branes,” *Class.Quant.Grav.* **20** (2003) S347–S372, [arXiv:hep-th/0303072 \[hep-th\]](#).
- [18] D. Marolf, L. Martucci, and P. J. Silva, “Fermions, T duality and effective actions for D-branes in bosonic backgrounds,” *JHEP* **0304** (2003) 051, [arXiv:hep-th/0303209 \[hep-th\]](#).
- [19] D. Marolf, L. Martucci, and P. J. Silva, “Actions and Fermionic symmetries for D-branes in bosonic backgrounds,” *JHEP* **0307** (2003) 019, [arXiv:hep-th/0306066 \[hep-th\]](#).
- [20] L. Martucci, J. Rosseel, D. Van den Bleeken, and A. Van Proeyen, “Dirac actions for D-branes on backgrounds with fluxes,” *Class.Quant.Grav.* **22** (2005) 2745–2764, [arXiv:hep-th/0504041 \[hep-th\]](#).
- [21] G. T. Horowitz and A. Strominger, “Black strings and P-branes,” *Nucl.Phys.* **B360** (1991) 197–209.

- [22] J. Polchinski, *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998.
- [23] J. Erdmenger, “Introduction to gauge/gravity duality,” *Lect.Notes Phys.* **851** (2012) 99–145.
- [24] S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from noncritical string theory,” *Phys.Lett.* **B428** (1998) 105–114, [arXiv:hep-th/9802109](#) [hep-th].
- [25] I. R. Klebanov and E. Witten, “AdS / CFT correspondence and symmetry breaking,” *Nucl.Phys.* **B556** (1999) 89–114, [arXiv:hep-th/9905104](#) [hep-th].
- [26] H. Kim, L. Romans, and P. van Nieuwenhuizen, “The Mass Spectrum of Chiral N=2 D=10 Supergravity on S⁵,” *Phys.Rev.* **D32** (1985) 389.
- [27] K. G. Wilson, “Confinement of Quarks,” *Phys.Rev.* **D10** (1974) 2445–2459.
- [28] S.-J. Rey and J.-T. Yee, “Macroscopic strings as heavy quarks in large N gauge theory and anti-de Sitter supergravity,” *Eur.Phys.J.* **C22** (2001) 379–394, [arXiv:hep-th/9803001](#) [hep-th].
- [29] J. M. Maldacena, “Wilson loops in large N field theories,” *Phys.Rev.Lett.* **80** (1998) 4859–4862, [arXiv:hep-th/9803002](#) [hep-th].
- [30] E. Witten, “Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories,” *Adv.Theor.Math.Phys.* **2** (1998) 505–532, [arXiv:hep-th/9803131](#) [hep-th].
- [31] S. Hawking and D. N. Page, “Thermodynamics of Black Holes in anti-De Sitter Space,” *Commun.Math.Phys.* **87** (1983) 577.
- [32] J. Kapusta and C. Gale, *Finite-temperature field theory: Principles and applications*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2006.

- [33] D. T. Son and A. O. Starinets, “Minkowski space correlators in AdS / CFT correspondence: Recipe and applications,” *JHEP* **0209** (2002) 042, [arXiv:hep-th/0205051 \[hep-th\]](#).
- [34] C. Herzog and D. Son, “Schwinger-Keldysh propagators from AdS/CFT correspondence,” *JHEP* **0303** (2003) 046, [arXiv:hep-th/0212072 \[hep-th\]](#).
- [35] A. Karch and E. Katz, “Adding flavor to AdS / CFT,” *JHEP* **0206** (2002) 043, [arXiv:hep-th/0205236 \[hep-th\]](#).
- [36] M. Kaminski, “Flavor Superconductivity & Superfluidity,” *Lect. Notes Phys.* **828** (2011) 349–393, [arXiv:1002.4886 \[hep-th\]](#).
- [37] J. Erdmenger, N. Evans, I. Kirsch, and E. Threlfall, “Mesons in Gauge/Gravity Duals - A Review,” *Eur.Phys.J.* **A35** (2008) 81–133, [arXiv:0711.4467 \[hep-th\]](#).
- [38] N. Itzhaki, J. M. Maldacena, J. Sonnenschein, and S. Yankielowicz, “Supergravity and the large N limit of theories with sixteen supercharges,” *Phys.Rev.* **D58** (1998) 046004, [arXiv:hep-th/9802042 \[hep-th\]](#).
- [39] J. McGreevy, “Holographic duality with a view toward many-body physics,” *Adv.High Energy Phys.* **2010** (2010) 723105, [arXiv:0909.0518 \[hep-th\]](#).
- [40] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog, and G. T. Horowitz, “Building a Holographic Superconductor,” *Phys.Rev.Lett.* **101** (2008) 031601, [arXiv:0803.3295 \[hep-th\]](#).
- [41] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog, and G. T. Horowitz, “Holographic Superconductors,” *JHEP* **0812** (2008) 015, [arXiv:0810.1563 \[hep-th\]](#).
- [42] S. S. Gubser, “Phase transitions near black hole horizons,” *Class.Quant.Grav.* **22** (2005) 5121–5144, [arXiv:hep-th/0505189 \[hep-th\]](#).

- [43] S. S. Gubser, “Breaking an Abelian gauge symmetry near a black hole horizon,” *Phys.Rev.* **D78** (2008) 065034, [arXiv:0801.2977 \[hep-th\]](#).
- [44] S. Kachru, X. Liu, and M. Mulligan, “Gravity Duals of Lifshitz-like Fixed Points,” *Phys.Rev.* **D78** (2008) 106005, [arXiv:0808.1725 \[hep-th\]](#).
- [45] S. A. Hartnoll, J. Polchinski, E. Silverstein, and D. Tong, “Towards strange metallic holography,” *JHEP* **1004** (2010) 120, [arXiv:0912.1061 \[hep-th\]](#).
- [46] E. Shuryak, “Why does the quark gluon plasma at RHIC behave as a nearly ideal fluid?,” *Prog.Part.Nucl.Phys.* **53** (2004) 273–303, [arXiv:hep-ph/0312227 \[hep-ph\]](#).
- [47] E. V. Shuryak, “What RHIC experiments and theory tell us about properties of quark-gluon plasma?,” *Nucl.Phys.* **A750** (2005) 64–83, [arXiv:hep-ph/0405066 \[hep-ph\]](#).
- [48] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. A. Tseytlin, “Coupling constant dependence in the thermodynamics of N=4 supersymmetric Yang-Mills theory,” *Nucl.Phys.* **B534** (1998) 202–222, [arXiv:hep-th/9805156 \[hep-th\]](#).
- [49] G. Policastro, D. Son, and A. Starinets, “The Shear viscosity of strongly coupled N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma,” *Phys.Rev.Lett.* **87** (2001) 081601, [arXiv:hep-th/0104066 \[hep-th\]](#).
- [50] P. Benincasa, A. Buchel, and R. Naryshkin, “The Shear viscosity of gauge theory plasma with chemical potentials,” *Phys.Lett.* **B645** (2007) 309–313, [arXiv:hep-th/0610145 \[hep-th\]](#).
- [51] D. T. Son and A. O. Starinets, “Viscosity, Black Holes, and Quantum Field Theory,” *Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.* **57** (2007) 95–118, [arXiv:0704.0240 \[hep-th\]](#).

- [52] N. Iqbal and H. Liu, “Universality of the hydrodynamic limit in AdS/CFT and the membrane paradigm,” *Phys.Rev.* **D79** (2009) 025023, [arXiv:0809.3808 \[hep-th\]](#).
- [53] D. Mateos, R. C. Myers, and R. M. Thomson, “Thermodynamics of the brane,” *JHEP* **0705** (2007) 067, [arXiv:hep-th/0701132 \[hep-th\]](#).
- [54] S. Kobayashi, D. Mateos, S. Matsuura, R. C. Myers, and R. M. Thomson, “Holographic phase transitions at finite baryon density,” *JHEP* **0702** (2007) 016, [arXiv:hep-th/0611099 \[hep-th\]](#).
- [55] D. Mateos, S. Matsuura, R. C. Myers, and R. M. Thomson, “Holographic phase transitions at finite chemical potential,” *JHEP* **0711** (2007) 085, [arXiv:0709.1225 \[hep-th\]](#).
- [56] J. Erdmenger, R. Meyer, and J. P. Shock, “AdS/CFT with flavour in electric and magnetic Kalb-Ramond fields,” *JHEP* **0712** (2007) 091, [arXiv:0709.1551 \[hep-th\]](#).
- [57] T. Albash, V. G. Filev, C. V. Johnson, and A. Kundu, “Quarks in an external electric field in finite temperature large N gauge theory,” *JHEP* **0808** (2008) 092, [arXiv:0709.1554 \[hep-th\]](#).
- [58] N. Evans, A. Gebauer, K.-Y. Kim, and M. Magou, “Holographic Description of the Phase Diagram of a Chiral Symmetry Breaking Gauge Theory,” *JHEP* **1003** (2010) 132, [arXiv:1002.1885 \[hep-th\]](#).
- [59] J. Erlich, E. Katz, D. T. Son, and M. A. Stephanov, “QCD and a holographic model of hadrons,” *Phys.Rev.Lett.* **95** (2005) 261602, [arXiv:hep-ph/0501128 \[hep-ph\]](#).
- [60] L. Da Rold and A. Pomarol, “Chiral symmetry breaking from five dimensional spaces,” *Nucl.Phys.* **B721** (2005) 79–97, [arXiv:hep-ph/0501218 \[hep-ph\]](#).

- [61] A. Karch, E. Katz, D. T. Son, and M. A. Stephanov, “Linear confinement and AdS/QCD,” *Phys.Rev.* **D74** (2006) 015005, [arXiv:hep-ph/0602229](#) [[hep-ph](#)].
- [62] T. Sakai and S. Sugimoto, “Low energy hadron physics in holographic QCD,” *Prog.Theor.Phys.* **113** (2005) 843–882, [arXiv:hep-th/0412141](#) [[hep-th](#)].
- [63] T. Sakai and S. Sugimoto, “More on a holographic dual of QCD,” *Prog.Theor.Phys.* **114** (2005) 1083–1118, [arXiv:hep-th/0507073](#) [[hep-th](#)].
- [64] O. Aharony, J. Sonnenschein, and S. Yankielowicz, “A Holographic model of deconfinement and chiral symmetry restoration,” *Annals Phys.* **322** (2007) 1420–1443, [arXiv:hep-th/0604161](#) [[hep-th](#)].
- [65] K. Peeters, J. Sonnenschein, and M. Zamaklar, “Holographic melting and related properties of mesons in a quark gluon plasma,” *Phys.Rev.* **D74** (2006) 106008, [arXiv:hep-th/0606195](#) [[hep-th](#)].
- [66] S. Kuperstein and J. Sonnenschein, “Noncritical supergravity ($d > 1$) and holography,” *JHEP* **0407** (2004) 049, [arXiv:hep-th/0403254](#) [[hep-th](#)].
- [67] S. Kuperstein and J. Sonnenschein, “Non-critical, near extremal AdS(6) background as a holographic laboratory of four dimensional YM theory,” *JHEP* **0411** (2004) 026, [arXiv:hep-th/0411009](#) [[hep-th](#)].
- [68] R. Casero, A. Paredes, and J. Sonnenschein, “Fundamental matter, meson spectroscopy and non-critical string/gauge duality,” *JHEP* **0601** (2006) 127, [arXiv:hep-th/0510110](#) [[hep-th](#)].
- [69] F. Bigazzi, A. L. Cotrone, J. Mas, D. Mayerson, and J. Tarrio, “Holographic Duals of Quark Gluon Plasmas with Unquenched Flavors,” *Commun.Theor.Phys.* **57** (2012) 364–386, [arXiv:1110.1744](#) [[hep-th](#)].

- [70] V. Mazu and J. Sonnenschein, “Non critical holographic models of the thermal phases of QCD,” *JHEP* **0806** (2008) 091, [arXiv:0711.4273 \[hep-th\]](#).
- [71] Y.-Y. Bu and J. M. Yang, “Spectral function and quark diffusion constant in non-critical holographic QCD,” *Nucl.Phys.* **B855** (2012) 388–419, [arXiv:1105.3646 \[hep-th\]](#).
- [72] G. Policastro, D. T. Son, and A. O. Starinets, “From AdS / CFT correspondence to hydrodynamics,” *JHEP* **0209** (2002) 043, [arXiv:hep-th/0205052 \[hep-th\]](#).
- [73] D. Teaney, “Finite temperature spectral densities of momentum and R-charge correlators in N=4 Yang Mills theory,” *Phys.Rev.* **D74** (2006) 045025, [arXiv:hep-ph/0602044 \[hep-ph\]](#).
- [74] P. K. Kovtun and A. O. Starinets, “Quasinormal modes and holography,” *Phys.Rev.* **D72** (2005) 086009, [arXiv:hep-th/0506184 \[hep-th\]](#).
- [75] D. Forster, *Hydrodynamic Fluctuations, Broken Symmetry, and Correlation Functions*. Westview Press, USA, 1995.
- [76] P. Kovtun, D. T. Son, and A. O. Starinets, “Holography and hydrodynamics: Diffusion on stretched horizons,” *JHEP* **0310** (2003) 064, [arXiv:hep-th/0309213 \[hep-th\]](#).
- [77] A. O. Starinets, “Quasinormal spectrum and the black hole membrane paradigm,” *Phys.Lett.* **B670** (2009) 442–445, [arXiv:0806.3797 \[hep-th\]](#).
- [78] J. Casalderrey-Solana and D. Teaney, “Heavy quark diffusion in strongly coupled N=4 Yang-Mills,” *Phys.Rev.* **D74** (2006) 085012, [arXiv:hep-ph/0605199 \[hep-ph\]](#).
- [79] S. S. Gubser, “Momentum fluctuations of heavy quarks in the gauge-string duality,” *Nucl.Phys.* **B790** (2008) 175–199, [arXiv:hep-th/0612143 \[hep-th\]](#).

- [80] J. Casalderrey-Solana and D. Teaney, “Transverse Momentum Broadening of a Fast Quark in a N=4 Yang Mills Plasma,” *JHEP* **0704** (2007) 039, [arXiv:hep-th/0701123 \[hep-th\]](#).
- [81] Y. Hatta, E. Iancu, and A. Mueller, “Deep inelastic scattering off a N=4 SYM plasma at strong coupling,” *JHEP* **0801** (2008) 063, [arXiv:0710.5297 \[hep-th\]](#).
- [82] Y. Y. Bu and J. M. Yang, “Structure function of holographic quark-gluon plasma: Sakai-Sugimoto model versus its non-critical version,” *Phys.Rev.* **D84** (2011) 106004, [arXiv:1109.4283 \[hep-th\]](#).
- [83] P. B. Arnold, G. D. Moore, and L. G. Yaffe, “Photon emission from quark gluon plasma: Complete leading order results,” *JHEP* **0112** (2001) 009, [arXiv:hep-ph/0111107 \[hep-ph\]](#).
- [84] S. Caron-Huot, P. Kovtun, G. D. Moore, A. Starinets, and L. G. Yaffe, “Photon and dilepton production in supersymmetric Yang-Mills plasma,” *JHEP* **0612** (2006) 015, [arXiv:hep-th/0607237 \[hep-th\]](#).
- [85] Y. Y. Bu, “Photoproduction and conductivity in dense holographic QCD,” *Phys.Rev.* **D86** (2012) 026003.
- [86] M. Kruczenski, D. Mateos, R. C. Myers, and D. J. Winters, “Towards a holographic dual of large N(c) QCD,” *JHEP* **0405** (2004) 041, [arXiv:hep-th/0311270 \[hep-th\]](#).
- [87] A. Nata Atmaja and K. Schalm, “Photon and Dilepton Production in Soft Wall AdS/QCD,” *JHEP* **1008** (2010) 124, [arXiv:0802.1460 \[hep-th\]](#).
- [88] V. Skokov, A. Y. Illarionov, and V. Toneev, “Estimate of the magnetic field strength in heavy-ion collisions,” *Int.J.Mod.Phys.* **A24** (2009) 5925–5932, [arXiv:0907.1396 \[nucl-th\]](#).
- [89] A. Adare *et al.*, “Observation of direct-photon collective flow in $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV Au+Au collisions,” *Phys.Rev.Lett.* **109** (2012) 122302, [arXiv:1105.4126 \[nucl-ex\]](#).

- [90] G. Basar, D. Kharzeev, D. Kharzeev, and V. Skokov, “Conformal anomaly as a source of soft photons in heavy ion collisions,” *Phys.Rev.Lett.* **109** (2012) 202303, [arXiv:1206.1334 \[hep-ph\]](#).
- [91] Y. Bu, “Electromagnetic signature in holographic plasma with B field,” *Phys.Rev.* **D87** (2013) 026005.
- [92] K. A. Mamo, “Strongly Enhanced Photon and Dilepton Production in Strongly Coupled N=4 Super-Yang-Mills Plasma in Strong External Magnetic Field,” [arXiv:1210.7428 \[hep-th\]](#).
- [93] P. Breitenlohner and D. Z. Freedman, “Positive Energy in anti-De Sitter Backgrounds and Gauged Extended Supergravity,” *Phys.Lett.* **B115** (1982) 197.
- [94] S. S. Gubser and S. S. Pufu, “The Gravity dual of a p-wave superconductor,” *JHEP* **0811** (2008) 033, [arXiv:0805.2960 \[hep-th\]](#).
- [95] S. S. Gubser, C. P. Herzog, S. S. Pufu, and T. Tesileanu, “Superconductors from Superstrings,” *Phys.Rev.Lett.* **103** (2009) 141601, [arXiv:0907.3510 \[hep-th\]](#).
- [96] J. P. Gauntlett, J. Sonner, and T. Wiseman, “Quantum Criticality and Holographic Superconductors in M-theory,” *JHEP* **1002** (2010) 060, [arXiv:0912.0512 \[hep-th\]](#).
- [97] M. Ammon, J. Erdmenger, M. Kaminski, and P. Kerner, “Superconductivity from gauge/gravity duality with flavor,” *Phys.Lett.* **B680** (2009) 516–520, [arXiv:0810.2316 \[hep-th\]](#).
- [98] M. Ammon, J. Erdmenger, M. Kaminski, and P. Kerner, “Flavor Superconductivity from Gauge/Gravity Duality,” *JHEP* **0910** (2009) 067, [arXiv:0903.1864 \[hep-th\]](#).
- [99] P. Basu, J. He, A. Mukherjee, and H.-H. Shieh, “Superconductivity from D3/D7: Holographic Pion Superfluid,” *JHEP* **0911** (2009) 070, [arXiv:0810.3970 \[hep-th\]](#).

- [100] N. R. Constable, J. Erdmenger, Z. Guralnik, and I. Kirsch, “Intersecting D-3 branes and holography,” *Phys.Rev.* **D68** (2003) 106007, [arXiv:hep-th/0211222 \[hep-th\]](#).
- [101] L.-Y. Hung and A. Sinha, “Holographic quantum liquids in 1+1 dimensions,” *JHEP* **1001** (2010) 114, [arXiv:0909.3526 \[hep-th\]](#).
- [102] D. Maity, S. Sarkar, N. Sircar, B. Sathiapalan, and R. Shankar, “Properties of CFTs dual to Charged BTZ black-hole,” *Nucl.Phys.* **B839** (2010) 526–551, [arXiv:0909.4051 \[hep-th\]](#).
- [103] K. Jensen, “Chiral anomalies and AdS/CMT in two dimensions,” *JHEP* **1101** (2011) 109, [arXiv:1012.4831 \[hep-th\]](#).
- [104] H.-U. Yee and I. Zahed, “Holographic two dimensional QCD and Chern-Simons term,” *JHEP* **1107** (2011) 033, [arXiv:1103.6286 \[hep-th\]](#).
- [105] J. Ren, “One-dimensional holographic superconductor from AdS_3/CFT_2 correspondence,” *JHEP* **1011** (2010) 055, [arXiv:1008.3904 \[hep-th\]](#).
- [106] Y. Bu, “1+1-dimensional p-wave superconductors from intersecting D-branes,” *Phys.Rev.* **D86** (2012) 106005, [arXiv:1205.1614 \[hep-th\]](#).
- [107] S. S. Gubser, “Colorful horizons with charge in anti-de Sitter space,” *Phys.Rev.Lett.* **101** (2008) 191601, [arXiv:0803.3483 \[hep-th\]](#).
- [108] G. T. Horowitz and M. M. Roberts, “Holographic Superconductors with Various Condensates,” *Phys.Rev.* **D78** (2008) 126008, [arXiv:0810.1077 \[hep-th\]](#).
- [109] D. Son, “Toward an AdS/cold atoms correspondence: A Geometric realization of the Schrodinger symmetry,” *Phys.Rev.* **D78** (2008) 046003, [arXiv:0804.3972 \[hep-th\]](#).
- [110] K. Balasubramanian and J. McGreevy, “Gravity duals for non-relativistic CFTs,” *Phys.Rev.Lett.* **101** (2008) 061601, [arXiv:0804.4053 \[hep-th\]](#).

- [111] M. Taylor, “Non-relativistic holography,” [arXiv:0812.0530 \[hep-th\]](#).
- [112] G. Bertoldi, B. A. Burrington, and A. Peet, “Black Holes in asymptotically Lifshitz spacetimes with arbitrary critical exponent,” *Phys.Rev.* **D80** (2009) 126003, [arXiv:0905.3183 \[hep-th\]](#).
- [113] E. Brynjolfsson, U. Danielsson, L. Thorlacius, and T. Zingg, “Holographic Superconductors with Lifshitz Scaling,” *J.Phys.* **A43** (2010) 065401, [arXiv:0908.2611 \[hep-th\]](#).
- [114] S.-J. Sin, S.-S. Xu, and Y. Zhou, “Holographic Superconductor for a Lifshitz fixed point,” *Int.J.Mod.Phys.* **A26** (2011) 4617–4631, [arXiv:0909.4857 \[hep-th\]](#).
- [115] Y. Bu, “Holographic superconductors with $z = 2$ Lifshitz scaling,” *Phys.Rev.* **D86** (2012) 046007, [arXiv:1211.0037 \[hep-th\]](#).
- [116] M. Ammon, J. Erdmenger, V. Grass, P. Kerner, and A. O’Bannon, “On Holographic p-wave Superfluids with Back-reaction,” *Phys.Lett.* **B686** (2010) 192–198, [arXiv:0912.3515 \[hep-th\]](#).
- [117] J. Erdmenger, P. Kerner, and H. Zeller, “Non-universal shear viscosity from Einstein gravity,” *Phys.Lett.* **B699** (2011) 301–304, [arXiv:1011.5912 \[hep-th\]](#).
- [118] J. Erdmenger, P. Kerner, and H. Zeller, “Transport in Anisotropic Superfluids: A Holographic Description,” *JHEP* **1201** (2012) 059, [arXiv:1110.0007 \[hep-th\]](#).
- [119] J. Erdmenger, D. Fernandez, and H. Zeller, “New Transport Properties of Anisotropic Holographic Superfluids,” [arXiv:1212.4838 \[hep-th\]](#).
- [120] T. Faulkner, G. T. Horowitz, J. McGreevy, M. M. Roberts, and D. Vegh, “Photoemission ‘experiments’ on holographic superconductors,” *JHEP* **1003** (2010) 121, [arXiv:0911.3402 \[hep-th\]](#).

-
- [121] S. S. Gubser, F. D. Rocha, and A. Yarom, “Fermion correlators in non-abelian holographic superconductors,” *JHEP* **1011** (2010) 085, [arXiv:1002.4416 \[hep-th\]](#).
- [122] E. Nakano and W.-Y. Wen, “Critical magnetic field in a holographic superconductor,” *Phys.Rev.* **D78** (2008) 046004, [arXiv:0804.3180 \[hep-th\]](#).
- [123] T. Albash and C. V. Johnson, “A Holographic Superconductor in an External Magnetic Field,” *JHEP* **0809** (2008) 121, [arXiv:0804.3466 \[hep-th\]](#).
- [124] R. Flauger, E. Pajer, and S. Papanikolaou, “A Striped Holographic Superconductor,” *Phys.Rev.* **D83** (2011) 064009, [arXiv:1010.1775 \[hep-th\]](#).
- [125] G. T. Horowitz, J. E. Santos, and D. Tong, “Optical Conductivity with Holographic Lattices,” *JHEP* **1207** (2012) 168, [arXiv:1204.0519 \[hep-th\]](#).
- [126] M. Ammon, J. Erdmenger, P. Kerner, and M. Strydom, “Black Hole Instability Induced by a Magnetic Field,” *Phys.Lett.* **B706** (2011) 94–99, [arXiv:1106.4551 \[hep-th\]](#).
- [127] M. Chernodub, J. Van Doorselaere, and H. Verschelde, “Electromagnetically superconducting phase of vacuum in strong magnetic field: structure of superconductor and superfluid vortex lattices in the ground state,” *Phys.Rev.* **D85** (2012) 045002, [arXiv:1111.4401 \[hep-ph\]](#).
- [128] Y.-Y. Bu, J. Erdmenger, J. P. Shock, and M. Strydom, “Magnetic field induced lattice ground states from holography,” *JHEP* **1303** (2013) 165, [arXiv:1210.6669 \[hep-th\]](#).

- [129] I. Amado, C. Hoyos-Badajoz, K. Landsteiner, and S. Montero, “Hydrodynamics and beyond in the strongly coupled N=4 plasma,” *JHEP* **0807** (2008) 133, [arXiv:0805.2570 \[hep-th\]](#).
- [130] J. Erdmenger, M. Kaminski, and F. Rust, “Holographic vector mesons from spectral functions at finite baryon or isospin density,” *Phys.Rev.* **D77** (2008) 046005, [arXiv:0710.0334 \[hep-th\]](#).
- [131] 王竹溪, 郭敦仁, 特殊函数概论. 北京大学出版社, 北京, 2000.
- [132] A. Nunez and A. O. Starinets, “AdS / CFT correspondence, quasinormal modes, and thermal correlators in N=4 SYM,” *Phys.Rev.* **D67** (2003) 124013, [arXiv:hep-th/0302026 \[hep-th\]](#).
- [133] A. Abrikosov, “On the Magnetic properties of superconductors of the second group,” *Sov.Phys.JETP* **5** (1957) 1174–1182.
- [134] A. A. Abrikosov, *Fundamentals of the Theory of Metals*. North Holland, Amsterdam, 1988.
- [135] B. Rosenstein and D. Li, “Ginzburg-landau theory of type ii superconductors in magnetic field,” *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 109–168.
- [136] W. H. Kleiner, L. M. Roth, and S. H. Autler, “Bulk solution of ginzburg-landau equations for type ii superconductors: Upper critical field region,” *Phys. Rev.* **133** (1964) A1226–A1227.
- [137] D. Mateos and D. Trancanelli, “The anisotropic N=4 super Yang-Mills plasma and its instabilities,” *Phys.Rev.Lett.* **107** (2011) 101601, [arXiv:1105.3472 \[hep-th\]](#).
- [138] N. Iizuka and K. Maeda, “Study of Anisotropic Black Branes in Asymptotically anti-de Sitter,” *JHEP* **1207** (2012) 129, [arXiv:1204.3008 \[hep-th\]](#).

发表文章目录

- [1] **Y.-Y. Bu**, J. Erdmenger, J. P. Schock, M. Strydom, Magnetic field induced lattice ground states from holography, JHEP 1303 (2013) 165 [arXiv:1210.6669]
- [2] **Y. Bu**, Electromagnetic signature in holographic plasma with B field, Phys. Rev. D87, 026005 (2013)
- [3] **Y. Bu**, Holographic superconductors with $z=2$ Lifshitz scaling, Phys. Rev. D86, 046007 (2012) [arXiv:1211.0037]
- [4] **Y. Y. Bu**, Photoproduction and conductivity in dense holographic QCD, Phys. Rev. D86, 026003 (2012)
- [5] **Y. Bu**, 1+1-dimensional p-wave superconductors from intersecting D-branes, Phys. Rev. D86, 106005 (2012) [arXiv:1205.1614]
- [6] **Y.-Y. Bu**, p-wave superconductors in D-brane systems, Nucl. Phys. B 864, 806 (2012)
- [7] **Y. Y. Bu**, J. M. Yang, Structure function of holographic quark-gluon plasma: Sakai-Sugimoto model versus its non-critical version, Phys. Rev. D86, 106004 (2012) [arXiv:1109.4283]
- [8] **Y.-Y. Bu**, J. M. Yang, Spectral function and quark diffusion constant in non-critical holographic QCD, Nucl. Phys. B855, 388 (2012) [arXiv:1105.3646]

简 历

基本情况

卜严严，男，河南省商城县人，1986年3月出生，未婚，中国科学院理论物理研究所在读博士研究生。

教育状况

2004年9月至2008年7月，苏州大学物理系，本科，专业：物理学。

2008年9月至2013年7月，中国科学院理论物理研究所，硕博连读研究生，专业：理论物理。

2011年10月至2013年7月，Max Planck Institute for Physics, Munich, Germany, 中国科学院-马普学会联合培养博士生，专业：理论物理。

研究兴趣

AdS/CFT对应及规范/引力对偶在强耦合物理体系中的应用，宇宙学微扰论及原初涨落。

联系方式

通讯地址：北京市海淀区中关村东路55号 中国科学院理论物理研究所2735信箱

邮编：100190

E-mail: yybu1986@gmail.com

致 谢

五年的研究生生活即将在这个夏季划上句号，对于我这个即将毕业的人来说，心情是复杂的。我的人生之路又将面临新的选择与征程，我讨厌选择，因为它让我心绪不宁。几年前的那种期待、躁动与不安似乎又重新回到了我身边。在这些年的学习、科研以及生活中，我得到了很多人的关心与帮助，这其中包括我的导师、同学，还有我的亲人朋友；虽然有时我也会感慨人事沧桑，甚至反感这个社会是如此的现实，但我还是从内心里感谢那些曾经帮助过我的人，即使是一点关心。每当想起他们时，我的心里有如阵阵暖流。

首先，我衷心地感谢我的导师杨金民研究员在过去五年中对我学习、科研工作及生活等方面的关心与指导。作为一位研究生导师，他无疑是优秀的。他不仅具有渊博的专业知识、很高的科研水平、严谨的治学精神、深邃的学术思想，他平易近人的人格魅力就足以让我终生难忘。在他的研究小组里让我感受到了一种近乎家的温馨。

特别感谢马普物理研究所的Johanna Erdmenger老师。在慕尼黑将近两年的学习与科研中，她悉心的指导使我对规范/引力对偶这一理论框架的认识有了很大的提高，同时她对我研究课题的建议与指导也使我受益匪浅。她严谨认真的学术态度与不轻易放弃的科研精神值得我好好学习。这篇论文的一部分工作正是在她的悉心指导与帮助下完成的。

非常感谢Jonathan Shock、Migael Strydom两位博士，与他们的合作是愉快的。与他们的讨论不仅使我对所研究问题有了更清晰的认识，也增强了我自身思考解决问题的能力。同时，他们在数值计算上给予我的帮助是异常宝贵的，是我能够顺利完成有关研究工作的强有力支持。感谢Rene Meyer博士，他对我科研的鼓励与帮助是我不断进步的动力。感谢林树博士，他严谨的科研作风与扎实的物理功底让我折服，与他的学术讨论使我获益良多。非常感谢高昕、张旭、孙尚右，在慕尼黑的近两年时间里，他们对我的科研工作与生活给予了很大的支持和帮助，这使得我度过一个个难关，他们高尚的人格值得我学习。与高昕、张旭在相关学术问题的讨论使我超弦的基本理论有了较清晰的图像，感谢他们在匆忙的科研之余阅读本论文的初稿并给出许多宝贵的建议。

感谢浙江大学的罗民兴教授，他的教诲使我明白了不少人生道理；同时，

作为一个过来人，他向我描述了自己的博士生涯，对此我有很大的感触。感谢蔡荣根研究员在百忙之中为我写推荐信以及对我在科研学术上的鼓励。感谢理论所各位老师的精彩讲座及前沿科研报告。

感谢庞大伟、Partric Kerner、Hansjörg Zeller、Stephan Steinfurt、Steffen Müller、Mario Araujo、Benedikt Herwerth、Ann-Kathrin Straub、Charlotte Sleight等在各方面给我提供的帮助，同他们在一些问题上的交流和讨论使我在学习与科研上有了一定的提高，同时也开阔了我的视野。

感谢师姐韩小芳、张焕君、衡朝霞，她们在我最初的科研学习和生活中给予了很大的支持与帮助。感谢师兄王飞、王雯宇、徐富强、王磊、刘涛、于立鑫等对我学习与科研的鼓励和支持，与他们的讨论增强了我对理论物理的兴趣。感谢武雷同学，和他一起讨论有关粒子唯象以及对撞机物理的问题使我很快进入到这一研究领域。感谢师弟韩成成、朱经亚、吴培文、张猛超和师妹王琳，与他们在学习上的互相讨论和生活中的愉快相处，都使我终生难忘。

感谢陈靖、邓礼、刘言东、刘泽鹏、刘知胜、庾忠梁、周高亮这些同一级的兄弟们，与他们相处的时光是愉快的，与他们的交流使我感到科研生活不再那么枯燥乏味。感谢所里的同学，陈朋、杜明凯、方超、康东彪、李睿、刘金岩、刘克松、徐大智、徐孝宝、续莺莺、杨宝春、张小虎、张云龙，他们陪伴我度过了在理论所的美好时光，让我的生活变得丰富多彩。感谢我的室友杨一波、高志全以及蔡丞韻，与他们的相处是融洽的，时光流逝却让我不能忘怀。感谢张振华、陈巧妮、聂文星，与他们在一个办公室是相当和谐融洽的，他们在我人生的低迷期对我的鼓励与支持使我找到了现在的研究方向。感谢霍云杰、陈海廷等师兄在诸多方面对我的帮助。

感谢Monika Goldammer女士、Rosita Jurgeleit女士、Petra Lindemann女士对我在生活与学习上的关心与热情帮助。

感谢我的亲人和朋友，他们对我默默的支持使我顺利的完成了学业。

最后，感谢百忙之中对本文进行审阅和评议的老师们。