



球形电极接地电阻的严格计算

张现周 杨金民 刘海祯

(河南师范大学物理系, 河南新乡 453002)

摘要 本文利用静电比拟方法和球面镜象法推证了球形电极接地电阻与半径及埋入深度的关系, 得到了计算球形电极接地电阻的一般公式, 并讨论了几种特殊情况。

在电工实践中, 常遇到接地问题, 接地电阻的计算是电磁场课程应解决的问题。国内的电磁场教材^[1-3], 都只是讨论了特殊情况下的接地电阻问题, 而对一般情况下, 非深埋球形电极的接地电阻讨论较少。本文采用静电比拟方法和球面镜象法, 严格导出了金属球接地电阻的公式。

考虑埋于地下的金属球, 如图1所示, 设流入地下的电流为 I , 此时金属球周围的电场要受到地面的影响, 而根据镜象法^[1], 地面的影响可用一镜象电极 $I' = I$ 代替, 如图2所示, 通过求图2中的两球体的电导 G , 就可以得到我们要求的实际电导 $G = G/2$ 。

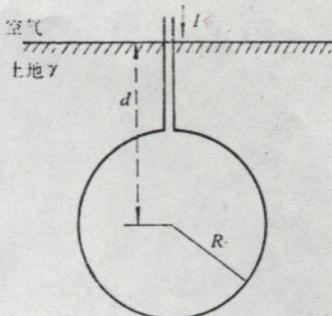


图1

计算图2的电导时, 我们采用静电比拟方法, 即作变换: $I \rightarrow q, \gamma \rightarrow \epsilon$, 将图2变换为图3。因图3两球带等量电荷 q , 应有同样电位, 故等价于导线连接的两金属球。因此求出图3中导线连接的两球孤立体系的电容 C , 即可得到图2中两球的电导 $G = C|_{\epsilon \rightarrow \gamma}$ 。这样, 求电导的问题就变成求图3中导线连接的两球孤立体系的电容。然而求解此体系的电容也是不容易的, 这

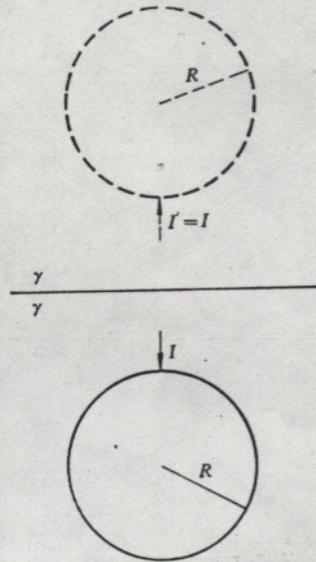


图2

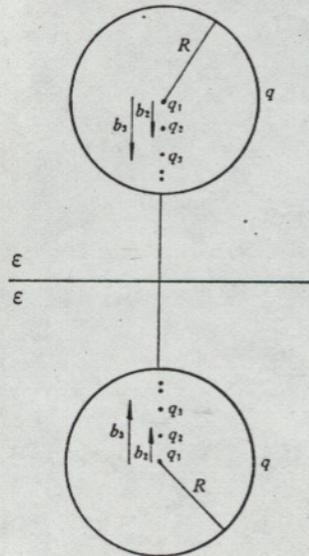


图3

里我们采用球面镜象法。

图3中的两球体有同样的电位,我们先假设其电位为 V_0 ,系统的电容可通过先求出两球体的总电荷而求得.设保证每个球的电位为 V_0 时每球所带的电量为 q ,则系统的电容 $C = 2q/V_0$,所以必须找出 q 和 V_0 的关系.此时 q 的大小及分布必须满足一定的条件才能保证每球电位为 V_0 .为此,可利用镜象法处理.

首先,在每个球的中心设置一电荷 $q_1 = Q = 4\pi\epsilon R V_0$,为保证每个球面都是等位面且电位等于 V_0 ,根据球面镜象法,就必须在每个球内设置无穷多个镜象电荷 $q_2, q_3, q_4, \dots, q_n, \dots$,它们都位于两球心的连线上,距球心分别为 $b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$

$$\left. \begin{aligned} q_2 &= -\frac{R}{D} q_1, \quad q_3 = -\frac{R}{D-b_2} q_2, \dots, \\ q_n &= -\frac{R}{D-b_{n-1}} q_{n-1} \dots \\ b_2 &= \frac{R^2}{D}, \quad b_3 = \frac{R^2}{D-b_2}, \dots, \quad b_n = \frac{R^2}{D-b_{n-1}} \\ &\dots, (D=2d) \end{aligned} \right\} (1)$$

于是有

$$D - b_{n-1} = -\frac{q_{n-1}}{q_n} R \quad (2)$$

$$\text{即} \quad b_n = \frac{q_n}{q_{n+1}} R + D \quad (3)$$

将(2)、(3)代入(1)式得

$$\frac{1}{q_{n+1}} + \frac{2\beta}{q_n} + \frac{1}{q_{n-1}} = 0 \quad (4a)$$

其中

$$\beta = \frac{D}{2R} = \frac{d}{R} \quad (4b)$$

若定义, $P_n = 1/q_n$, 则有

$$P_{n+1} + 2\beta P_n + P_{n-1} = 0 \quad (5)$$

设此方程的解为

$$P_n = A\lambda^n \quad (6)$$

把(6)代入(5)式得

$$\lambda^{n+1} + 2\beta\lambda^n + \lambda^{n-1} = 0 \quad (7a)$$

$$\text{即} \quad \lambda^2 + 2\beta\lambda + 1 = 0 \quad (7b)$$

此方程的解为

$$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 1} \quad (8a)$$

$$\lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - 1} \quad (8b)$$

所以方程(5)的通解为

$$P_n = A_1 \lambda_1^n + A_2 \lambda_2^n \quad (9)$$

其中常数 A_1 和 A_2 可通过下列方程组来定出

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= 1/q_1 = 1/Q = A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 \\ P_2 &= -2\beta/Q = A_1 \lambda_1^2 + A_2 \lambda_2^2 \end{aligned} \right\} (10)$$

此方程组的解为

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2Q\sqrt{\beta^2 - 1}} \\ A_2 &= -\frac{1}{2Q\sqrt{\beta^2 - 1}} \end{aligned} \right\} (11)$$

这样可以得出

$$q_n = \frac{1}{P_n} = \frac{2Q\sqrt{\beta^2 - 1}}{\lambda_1^n - \lambda_2^n} \quad (12)$$

考虑到 $\lambda_1 = 1/\lambda_2$ 及 $2\lambda_1\sqrt{\beta^2 - 1} = \lambda_1^2 - 1, q_n$ 可写为

$$q_n = \frac{Q(\lambda_1^2 - 1)\lambda_1^{n-1}}{\lambda_1^{2n} - 1} \quad (13)$$

所以两个球所带的总电荷

$$\begin{aligned} 2q &= 2\sum_{n=1}^{\infty} q_n \\ &= 8\pi\epsilon R V_0 (\lambda_1^2 - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^{n-1}}{\lambda_1^{2n} - 1} \end{aligned} \quad (14)$$

$$C = \frac{2q}{V_0} = 8\pi\epsilon R (\lambda_1^2 - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^{n-1}}{\lambda_1^{2n} - 1} \quad (15)$$

则由静电比拟原理可得两球的电导

$$\begin{aligned} G &= 8\pi\nu R (\lambda_1^2 - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^{n-1}}{\lambda_1^{2n} - 1} \\ &= 8\pi\nu R (\lambda_1^2 - 1) \left[\frac{1}{\lambda_1^2 - 1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1^4 - 1} + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^6 - 1} + \dots \right] \end{aligned} \quad (16)$$

而所求的实际电导则为

$$G' = 4\pi\nu R (\lambda_1^2 - 1) \left[\frac{1}{\lambda_1^2 - 1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1^4 - 1} + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^6 - 1} + \dots \right] \quad (17)$$

这即是图1球形电极接地电导的一般计算公式,其中 λ_1 为常数,由(8a)式给出.这样接地电阻则可由 $R_{地} = 1/G'$ 得到解决.

(下转21页)

具有凸凹透镜的作用。

(2)(17)、(18)式表示象点的极坐标位置,它们说明波带片所成的象一定处在物点和对称轴构成的平面与象平面相交的直线上,并且当 $\varphi' = +\pi/2$ 时,表示象点处在正 y' 轴上, $\varphi' = -\pi/2$ 时表示象点处在负 y' 轴上。

为了讨论在不同情况下波带片所成象的实虚性质,把(11)式代入(18)式得

$$\begin{aligned} \text{当 } \varphi' = +\frac{\pi}{2} \text{ 时, } r' &= -\frac{z}{z_0} y'' \\ &= \begin{cases} -\frac{y'' f_n}{z_0 - f_n} & z \text{ 为正值 (实象)} \\ \frac{y'' f_n}{z_0 - f_n} & z \text{ 为负值 (虚象)} \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{当 } \varphi' = -\frac{\pi}{2} \text{ 时, } r' &= +\frac{z}{z_0} y'' \\ &= \begin{cases} \frac{y'' f_n}{z_0 - f_n} & z \text{ 为正值 (实象)} \\ -\frac{y'' f_n}{z_0 - f_n} & z \text{ 为负值 (虚象)} \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

由于 r' 不能为负值,故由(19)、(20)式知:在 $z_0 > f_n$ 情况下,当 $\varphi' = +\pi/2$ 时为虚象,当 $\varphi' = -\pi/2$ 时为实象;在 $z_0 < f_n$ 情况下,当 $\varphi' = +\pi/2$ 时为实象,当 $\varphi' = -\pi/2$ 时为虚象。

(3)对于近轴物体的成象问题,(11)、(17)、(18)式仍然适用。这是因为,发光物体可看作许多点光源

的集合,每个点光源对应各自一定的象点,这许多个象点的集合就是物体的象。这时, $\varphi' = \pm\pi/2$ 分别表示象是正立的和倒立的,(18)式表示物体经波带片成象的横向放大率,并由(19)式和(20)式知:在 $z_0 > f_n$ 情况下,所成的象是倒立的实象和正立的虚象;在 $z_0 < f_n$ 情况下,所成的象则是正立的实象和倒立的虚象。

本文得到的结果(9)、(10)、(11)和(17)、(18)式,是Fresnel波带片衍射的更为一般的结果。如果令 $z_0 \rightarrow \infty$,由(11)、(18)式可确定波带片的一系列焦点的位置,得到文[1]—[3]的结果,并由(9)、(10)式又可得到文[4]中(15)、(16)式。若令 $y'' \rightarrow 0$,由(18)式知 $r' = 0$,即在 z 处的观察屏中心形成与点光源对应的象点,这正是文[4]的结论。由此可见,文献[1]—[4]的有关结论均为其在 $z_0 \rightarrow \infty$ 或 $y'' \rightarrow 0$ 条件下的特例。

参考文献

- [1] M. Sussman, Am. J. Phys. 28, 1960, 394.
- [2] 郭永康, 大学物理, 1984, 3(8): 4.
- [3] 蔡海涛, 郭永康, 大学物理, 1991, 10(4): 13.
- [4] 姚开勋, 大学物理, 1991, 10(11): 26.
- [5] Keigo Iizuka, Engineering Optics, (Second Edition) 1987, 3.7
- [6] 朱自强等, 现代光学教程, 成都: 四川大学出版社, 1990, 37—43.

(上接 18 页)

讨论: (1)当 $d \gg R$, 即深埋时,

$$\beta = \frac{d}{R} \gg 1, \lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 1} \rightarrow 0 \quad (18)$$

$$G \approx 4\pi\gamma R \quad (19)$$

这与文献[2]结果一致。

(2)当 $d = R$, 即球面紧接地面时, $\lambda_1 \rightarrow -1$

$$\begin{aligned} G' &= 4\pi\gamma R \lim_{\lambda_1 \rightarrow -1} \left\{ (\lambda_1^2 - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^{n-1}}{\lambda_1^{2n} - 1} \right\} \\ &= 4\pi\gamma R \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\lambda_1 \rightarrow -1} \frac{2\lambda_1}{2n\lambda_1^{2n-1} - 1} (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 4\pi\gamma R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \\ &= 4\pi\gamma R \ln 2 \end{aligned} \quad (20)$$

当然,一般情况下,球埋地不是很深而也不是紧接地面时,其电导应介于 $4\pi\gamma R$ 和 $4\pi\gamma R \ln 2$ 之间。

参考文献

- [1] 冯慈璋, 电磁场, 第2版, 北京: 高等教育出版社, 1983, 106.
- [2] 黄礼镇, 电磁场原理, 北京: 人民教育出版社, 1981, 104.
- [3] 毕德显, 电磁场理论, 北京: 电子工业出版社, 1985, 231.