

分类号 \_\_\_\_\_

密级 \_\_\_\_\_

UDC \_\_\_\_\_

编号 \_\_\_\_\_

# 中国科学院研究生院 理学博士学位论文

超对称破缺及暴涨宇宙学的一些研究

徐富强

指导教师 \_\_\_\_\_ 杨金民 研究员

中国科学院理论物理研究所

申请学位级别 理学博士 学科专业名称 场论与粒子物理

论文提交日期 2008年6月 论文答辩日期 2008年6月

培养单位 \_\_\_\_\_ 中国科学院理论物理研究所

学位授予单位 \_\_\_\_\_ 中国科学院研究生院

答辩委员会主席 \_\_\_\_\_

Typeset by L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2 $\epsilon$  at May 13, 2008

With package CASthesis v0.1h of C<sub>T</sub>E<sub>X</sub>.ORG

# Some Studies on Supersymmetry Breaking and Inflationary Cosmology

**Fuqiang Xu**

Supervisor:

Prof. Jin Min Yang

Institute of Theoretical Physics  
Chinese Academy of Sciences

May, 2008

*Submitted in total fulfilment of the requirements for the degree of Ph.D.  
in Particle Physics and Field Theories*



## 摘 要

本文主要探讨了两个方面的问题. 一方面在ISS模型(即亚稳的动力学超对称破缺模型)背景下, 仔细考察了其在直接规范传导时的两个问题: gaugino质量问题和Landau极点问题. 另一方面我们探讨了宇宙早期极大的平坦方向真空期望值的影响(以在AD重子起源机制为例), 一般而言这个真空期望值将会导致F项杂化暴涨模型的退出机制或者重新加热机制失效.

在第一章中, 我们简要介绍了超对称破缺模型的概况, 包括最小超对称标准模型及其软破缺, 超对称破缺传导的两种机制, 以及 $N=1$ 时SQCD中的电磁对偶, 这个对偶在下章的亚稳动力学超对称破缺模型将起到至关重要的作用.

在第二章中, 介绍了ISS模型, 及其一些之后的发展方向, 以及着重讲述了三种简单的ISS模型的形变及其唯象结果. 特别的, 我们考虑了ISS模型一般的 $\Phi^2$ 形变, 我们发现不仅可以得到合适大小的gaugino质量, 还发现了一组解用于解决Landau极点问题, 从而解决了直接规范传导模型所有的遗留问题.

在第三章中, 我们首先简介了暴涨宇宙学. 简述了宇宙学中的标准大爆炸模型及其困难, 暴涨宇宙学中最成功的预测—密度扰动的机理, 以及三个超对称粒子模型在暴涨模型中的应用.

最后在第四章中, 我们在超对称暴涨模型之中, 探讨了一般的场耦合情况下可能导致的性质. 我们发现在最小超对称标准模型中的一些平坦方向, 如 $udd$ 和 $LLe$ 方向, 即使其跟暴涨时辅助场之间的耦合有Planck能标压低, 同样会导致F项暴涨模型的自然退出机制或者重新加热机制失效, 必须引进额外的整体对称性来禁止它们与辅助场耦合项的存在. 同样我们分析了D项暴涨模型则在MSSM背景下一般不会导致任何问题.

**关键词:** 超对称破缺, 亚稳真空, 暴涨, 重子起源



## Abstract

In this thesis, we have mainly discussed two questions. At first, we study the direct gauge mediation of metastable supersymmetry breaking in the context of the ISS model. In this scenario how to get the proper gaugino mass and to avoid the Landau pole problem are the two most important facets. Secondly, we turn to astroparticle, and investigate the effects of the large VEV of flat directions (for example the large VEV in AD baryogenesis) on supersymmetric inflationary model. We find in general the large VEV will lead to no-exit problem or no (p)reheating mechanism in F-term inflation models.

In chapter 1, we overview the models of supersymmetry breaking: the Minimal Supersymmetric Standard Model and its soft breaking terms; the two kinds of mediation of supersymmetry breaking: gravity mediation and gauge mediation. We introduce the duality of N=1 SQCD which is the basis of a new dynamical supersymmetry breaking model—ISS model.

In chapter 2, after introducing the ISS model and listing some development of it, we discuss three simple deformation of ISS model and its phenomenology in detail. Especially, we discuss the phenomenology of the  $\Phi^2$  deformation, and we find in this model it's viable to get a proper gaugino mass and avoid the Landau pole problem, so we solve all the remaining questions of direct gauge mediation models.

In chapter 3, we overview the inflationary cosmology, its role in big bang model and scale-invariance spectrum. Especially, the supersymmetric inflationary models are central points.

In chapter 4, We examine the constraints on F-term hybrid inflation by considering the flat directions in the Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM). We find that some coupling terms between the flat direction fields and the field which dominates the energy density during inflation are quite dangerous and can cause the no-exit of hybrid inflation even if their coupling strength is suppressed by Planck scale, e.g.  $udd$  and  $LLe$ . Such couplings must be forbidden

by imposing some symmetry for a successful F-term hybrid inflation. At the same time, we find that in the D-term inflation these couplings can be avoided naturally.

**Keywords:** SUSY breaking, Meta-stable vacua, Inflation, Baryogenesis

# 目 录

摘要	i
Abstract	iii
目录	v
<b>第一章 超对称及其破缺模型简介</b>	<b>1</b>
1.1 最小超对称标准模型	1
1.1.1 MSSM的相互作用	1
1.1.2 软的超对称破缺	3
1.1.3 规范耦合常数的统一	6
1.2 超对称破缺的传导机制	7
1.2.1 超对称破缺的引力传导	7
1.2.2 超对称破缺的规范传导	10
1.3 $N = 1$ 超对称规范理论简介	13
1.3.1 位相与模空间	13
1.3.2 $N = 1$ 超对称规范理论的对偶	14
<b>第二章 ISS模型及其一些应用</b>	<b>21</b>
2.1 ISS模型和亚稳真空	21
2.1.1 ISS模型	21
2.1.2 亚稳真空的寿命	24
2.1.3 ISS模型中的能标	25
2.1.4 另一个亚稳真空模型	26
2.2 ISS模型中的形变	28
2.2.1 ISS模型的 $Z\tilde{Z}$ 形变	29

2.2.2	ISS模型的 $\Phi^2$ 形变	31
2.2.3	ISS模型的 $(q\tilde{q})^2$ 形变	33
2.3	规范传导模型的问题	35
2.3.1	gaugino的质量	36
2.3.2	Landau极点问题	39
<b>第三章</b>	<b>暴涨宇宙学</b>	<b>43</b>
3.1	大爆炸宇宙学	43
3.1.1	标准宇宙学模型简介	43
3.1.2	困难及其解决	44
3.2	暴涨模型	47
3.2.1	慢滚暴涨	51
3.2.2	混沌暴涨模型	54
3.2.3	杂化暴涨模型	56
3.3	超对称暴涨模型	56
3.3.1	超级自然暴涨模型	57
3.3.2	DSS暴涨模型	58
<b>第四章</b>	<b>超对称暴涨模型的限制</b>	<b>65</b>
4.1	AD重子起源机制	65
4.2	平坦方向	69
4.3	F项暴涨模型及其限制	71
4.4	D项暴涨模型及其限制	74
	<b>参考文献</b>	<b>79</b>
	<b>发表文章目录</b>	<b>89</b>
	<b>简历</b>	<b>91</b>
	<b>致谢</b>	<b>93</b>

## 表 格

1.1 MSSM的粒子谱 . . . . .	4
4.1 最小超对称标准模型中模空间的复维数 . . . . .	72



## 插 图

1.1	标准模型中耦合常数的跑动 . . . . .	7
1.2	超对称模型中耦合常数的跑动 . . . . .	8
1.3	Gaugino质量产生图 . . . . .	11
1.4	Squark质量产生图 . . . . .	11
1.5	超对称规范理论位相随 $N_f$ 变化的关系图. . . . .	19
2.1	ISS模型中的势能图 . . . . .	24
2.2	$Z\tilde{Z}$ 形变之后的一圈有效势 . . . . .	31
2.3	$q\tilde{q}$ 形变之后的一圈有效势与模场 $\hat{\Phi}$ 关系图 . . . . .	35
3.1	在暴涨开始以前的阶段用虚线表示, 暴涨期间 $\Omega$ 演化至1, 并延续到现在. 也许在遥远的将来会偏离现在的结果. . . . .	45
3.2	图中RD表示辐射占主导时期, MD表示物质占主导时期, 我们统一用一条线表示. 绿色的线表示视界的演化过程, 首先在暴涨期间接近不变, 在RD时正比于 $a^2$ , 在MD时正比于 $a^{3/2}$ . 红线表示物理波长 $\lambda$ 的演化. 箭头所指是在物理波长等于视界 $H^{-1}$ 的两个时刻. . . . .	62
3.3	慢滚暴涨模型的势能. 图中定性的表示出了暴涨开始和结束的三个不同位相:(a)势能遂穿阶段(假如必要的话), (b)慢滚阶段, (c)在势能极小值的相干振动. . . . .	63
3.4	考虑了非最小Kahler势修正之后DSS模型对谱指标 $n_s$ 的预测. 其中 $\kappa$ 相当于我这里的 $g$ , 而 $\kappa_s$ 是Kahler势修正项的耦合常数. $\delta K = \kappa_s  \phi ^4 / (4M_p^2)$ . . . . .	63



# 第一章 超对称及其破缺模型简介

在这一章中,我们将简单介绍下超对称理论中的三个方面.首先是研究得最广的最小超对称标准模型,它的软破缺项,以及一些超对称模型漂亮的性质.如何产生恰当的破缺超对称的软项则是超对称破缺传导机制要考虑的问题.第二节我们将只简略讨论其中两个最主要的机制,引力传导和规范传导机制[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].一般而言,我们相信超对称破缺存在一个动力学解释,超对称规范理论的对偶在其中起到了重要的作用.因此第三节我们将简述一下在 $N = 1$ 超对称规范理论中的Seiberg对偶[9, 10, 11, 12, 13, 14].

## 1.1 最小超对称标准模型

粒子物理中标准模型取得了极大的成功,然而诸多的理论问题使得人们相信在更高能标应该存在新物理.低能超对称作为目前新物理的最为强力的候选者得到了最多的关注.低能超对称的动机是为了解释标量粒子为什么是轻的.简单的逻辑是,费米子能够被手征对称性保护,如果费米子和标量粒子之间有超对称性,则相同的手征对称性也将保护标量粒子.下面我们将简要介绍最小超对称标准模型(MSSM).它是标准模型超对称化下的最小的也是最简单的超对称推广.在MSSM中的粒子谱见下表(1.1).除了一个额外的Higgs超场外,标准模型中所有粒子都相应的被加了一个超对称伙伴粒子.

### 1.1.1 MSSM的相互作用

为了构建最小超对称标准模型,我们简单的把所有的标准模型费米子嵌入到手征超场中,把所有的规范粒子嵌入到矢量超场中.一般的超场形式我们可以写成:

$$\Phi(x, \theta) = \phi(x) + \theta\psi(x) + \theta\theta F(x). \quad (1.1)$$

$$V(x, \theta) = -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x). \quad (1.2)$$

其中矢量超场 $V$ 中,我们取定了Wess-Zumino规范.我们也可以说 $(\phi, \psi, F)$ 和 $(v, \lambda, D)$ 各组成一个超(对称)多重态.

Higgs粒子也嵌入到手征超场中, 然而为了给上夸克和下夸克质量, 我们必须在MSSM中加一个额外的手征Higgs超场. 这一点可以从标准模型中的Yukawa耦合项的扩展看出. 标准模型中的Yukawa耦合项有如下形式:

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = y_{\alpha\beta}^L \bar{L}_\alpha E_\beta H + y_{\alpha\beta}^D \bar{Q}_\alpha D_\beta H + y_{\alpha\beta}^U \bar{Q}_\alpha U_\beta \tilde{H} + h.c., \quad (1.3)$$

等号右边第三项中 $\tilde{H} = i\tau_2 H^\dagger$ , 其中 $\tau_2$ 为Pauli矩阵. 上面的Yukawa耦合项的超对称扩展, 就是把标准模型中的场改为相应的超场, 则标准模型中的 $\mathcal{L}_{Yukawa}$ 就是超对称中的超势项, 由于超势项的全纯性, 其中不能出现 $\hat{H}^\dagger$ 项( $H$ 上方的帽子表示它是超场), 于是只能引进额外的Higgs超场. 实际上 $U(1)_Y$ 超荷的反常相消也要求我们引进至少两个Higgs超场. 具体的说, 实现Higgsino的 $U(1)^3$ 反常相消最简单的方法是假设有两个 $U(1)_Y$ 超荷刚好相反的Higgs超场. 见表(1.1).

下面简单介绍一下MSSM中的拉氏量, 包含两部分: 一部分是超对称的, 一部分是超对称的具体破缺项:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SUSY} + \mathcal{L}_{Breaking}, \quad (1.4)$$

其中 $\mathcal{L}_{SUSY}$ 还可以分成两部分:

$$\mathcal{L}_{SUSY} = \mathcal{L}_{Gauge} + \mathcal{L}_{Yukawa} \quad (1.5)$$

而且

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Gauge} = & \sum_{gauge} \frac{1}{4} \left( \int d^2\theta \text{Tr} W^\alpha W_\alpha + \int d^2\bar{\theta} \text{Tr} \bar{W}^{\dot{\alpha}} \bar{W}_{\dot{\alpha}} \right) \\ & + \sum_{Matter} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi_i^\dagger e^{g_3 \hat{V}_3 + g_2 \hat{V}_2 + g_1 \hat{V}_1} \Phi_i, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = \int d^2\theta (W_R + W_{NR}) + h.c. \quad (1.7)$$

超势中的指标 $R$ 是指其中保持 $R$ 宇称[15]的项. 可以写成:

$$W_R = \epsilon_{ij} (y_{ab}^U Q_a^j U_b^c H_2^i + y_{ab}^D Q_a^j D_b^c H_1^i + y_{ab}^L L_a^j E_b^c H_1^i + \mu H_1^i H_2^j), \quad (1.8)$$

其中 $i, j = 1, 2$ 是 $SU(2)$ 指标,  $a, b = 1, 2, 3$ 是代指标, 我们省略了 $SU(3)$ 的色指标.  $W_{NR}$ 表示超势中没有 $R$ 宇称的相互作用项:

$$\begin{aligned} W_{NR} = & \epsilon_{ij} (\lambda_{abd}^L L_a^i L_b^j E_d^c + \lambda_{abd}^{L'} L_a^i Q_b^j D_d^c + \mu'_a L_a^i H_2^j) \\ & + \lambda_{abd}^B U_a^c D_b^c D_d^c. \end{aligned} \quad (1.9)$$

R宇称是超对称理论中另一种可能的对称性. 同一超多重态中不同的分量场有不同R宇称量子数.

最小超对称标准模型的超对称破缺项, 一般由软破缺项来提供. 软破缺项的具体推导将是我们下一小节的内容. 这里我们为了完整的给出MSSM的拉氏量, 事先把它们写在这里, 一般的软破缺项有:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{soft} = & - \sum_i m_i^2 |A_i|^2 - \sum_i M_i (\lambda_i \lambda_i + \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_i) \\ & - \sum_{ij} B_{ij} A_i A_j - \sum_{ijk} A_{ijk} A_i A_j A_k + h.c., \end{aligned} \quad (1.10)$$

其中 $B_{ij}$ 和 $A_{ijk}$ 是破坏规范对称性的耦合项. 应用到MSSM中, 我们有:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{Breaking} = & \sum_i m_{0i}^2 |\varphi_i|^2 + \left( \frac{1}{2} \sum_\alpha M_\alpha \tilde{\lambda}_\alpha \tilde{\lambda}_\alpha + B H_1 H_2 \right. \\ & \left. + A_{ab}^U \tilde{Q}_a \tilde{U}_b^c H_2 + A_{ab}^D \tilde{Q}_a \tilde{D}_b^c H_1 + A_{ab}^L \tilde{L}_a \tilde{E}_b^c H_1 + h.c. \right), \end{aligned} \quad (1.11)$$

其中的场内容都可以在表(1.1)中找到. 一般的我们构建一个超对称破缺的模型, 都需要计算模型预测的软破缺项有多大, 以便在实验中区别各种不同的模型. 软项的由来也是我们下一小节的主要内容.

### 1.1.2 软的超对称破缺

超对称的理论可以自然的解决等级问题, 然而现实世界并非超对称的, 必须考虑超对称破缺的问题, 于是超对称破缺的程度又会反馈回去影响超对称理论对等级问题的解决. 为了避免太大的反馈, 我们就要求破缺超对称的相互作用必须是软的. 这里软的意思是指那些相互作用不能引起两次或者更高阶的发散. 没有这些高阶的发散项, 我们得到即使在相对高的能标做截断时不需要耦合常数的精细调节, 也可以认为在这个相对高的截断能标(紫外能标)之下超对称是一个好的近似. 换句话说, 软项引起的辐射修正并没大的影响, 为接着解决等级问题创造了必要的基础<sup>1</sup>.

一般的, 超对称的自发破缺在高能时能够产生一些超可重整项. 这些超可重整项能够破坏低能有效理论的超对称性, 我们这里要重点讨论的软破缺项就是

<sup>1</sup>接着要做的是如何自然的得到相对高的截断能标, 这是动力学超对称破缺将要涉及到的主题, 下一章的ISS模型就是其中一种. 我们这里跳过不讲.

表 1.1: MSSM的粒子谱

MSSM的粒子谱							
Superfield	Bosons		Fermions		$SU_c(3)$	$SU_L(2)$	$U_Y(1)$
Gauge							
$\mathbf{G}^a$	gluon	$g^a$	gluino	$\tilde{g}^a$	8	0	0
$\mathbf{V}^k$	Weak	$W^k (W^\pm, Z)$	wino, zino	$\tilde{w}^k (\tilde{w}^\pm, \tilde{z})$	1	3	0
$\mathbf{V}'$	Hypercharge	$B (\gamma)$	bino	$\tilde{b}(\tilde{\gamma})$	1	1	0
Matter							
$\mathbf{L}_i$	sleptons	$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{L}_i = (\tilde{\nu}, \tilde{e})_L \\ \tilde{E}_i = \tilde{e}_R \end{array} \right.$	leptons	$\left\{ \begin{array}{l} L_i = (\nu, e)_L \\ E_i = e_R^c \end{array} \right.$	1	2	-1
$\mathbf{E}_i$					1	1	2
$\mathbf{Q}_i$	squarks	$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{Q}_i = (\tilde{u}, \tilde{d})_L \\ \tilde{U}_i = \tilde{u}_R \\ \tilde{D}_i = \tilde{d}_R \end{array} \right.$	quarks	$\left\{ \begin{array}{l} Q_i = (u, d)_L \\ U_i = u_R^c \\ D_i = d_R^c \end{array} \right.$	3	2	1/3
$\mathbf{U}_i$					3*	1	-4/3
$\mathbf{D}_i$					3*	1	2/3
Higgs							
$\mathbf{H}_1$	Higgses	$\left\{ \begin{array}{l} H_1 \\ H_2 \end{array} \right.$	higgsinos	$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{H}_1 \\ \tilde{H}_2 \end{array} \right.$	1	2	-1
$\mathbf{H}_2$					1	2	1

这些超可重整项的一种. 超可重整项, 就是指那些对表观发散度贡献负值的相互作用项.<sup>2</sup> 由超可重整项生成的新的量纲为 $d$ 的算符, 我们可以简单估算它的耦合常数约为 $\Lambda^p$ , 其中 $\Lambda$ 为紫外能标.  $p$ 的最大值<sup>3</sup>有:

$$p = 4 - d - (4 - d_1) - (4 - d_2) - \dots \quad (1.12)$$

其中 $d_1, d_2$ 是指超可重整项算符的量纲. 我们知道 $(4 - d_i)$ 是相互作用项中耦合常数的量纲, 而发散项只来源于场与场之间缩并时的积分, 与耦合常数量纲无关.

<sup>2</sup>也就是说这些相互作用项至多导致有限个Feynman图发散, 因为在Feynman图中增加这些相互作用会减少表观发散度. 简单的说算子量纲小于4是超可重整的, 等于4是可重整的, 大于4则是不可重整的. 注意我们这里说算符量纲或相互作用量纲多少时, 不包括它的耦合常数的量纲.

<sup>3</sup>之所以是最大值, 是考虑到超可重整项外, 还有别的参与耦合的相互作用项, 如超对称本身的相互作用. 设这种相互作用有量纲 $x$ , 则下面 $p$ 应该改成 $p - x$ .

必须扣除. 当然算符的量纲 $d$ 也要扣除(这个处理其实远没有完整, 忽略了子图的发散性). 如果 $p < 0$ , 则超可重整算符生成的Feynman图是有限的. 从上面式子中我们可以看出只有在 $(4 - d_i)$ 大于0的情况下, 也就是超可重整的算符, 我们才可以使得 $p$ 减小. 而可重整的项的插入则完全没变化.

在计算什么样的超可重整项满足软项的要求( $p < 2$ )之前, 我们先例出两个假设和一个重要的定理如下:

- 因为正如我们上面看到的, 可重整项的插入不会改变发散度. 本质上我们也可以考虑它作为软项. 然而考虑最简单的, 我们假设所有严格的可重整的相互作用( $d=4$ )都是超对称的.
- 在超对称有效拉氏量中, 辐射修正不可能在一阶近似下产生 $\kappa^3\phi$ 场或者 $\kappa^3\phi^*$ 的算符[5], 其中 $\kappa$ 是量纲为1的耦合常数. 这个定理排除了 $d = 1$ 的算符作为软项的可能性.
- 我们也不考虑拉氏量中常数项(即 $d = 0$ )引起的发散问题. 因为在现阶段宇宙学常数引起的问题还没有一个令人信服的解.

剩下的就是分类检验公式(1.12)中各种可能超可重整项导致的 $p$ 值到底能有多大. 可以分类讨论如下:

- 当式子(1.12)中 $d = 4$ 时, 也就是说我们需要考虑超对称破缺项对原本满足超对称的可重整相互作用的修正, 只要超对称破缺项是超可重整的, 即它的 $(4 - d_i) > 0$ , 则 $p$ 始终小于零. 始终满足软项的要求 $p < 2$ .
- 最为危险的是考虑超可重整项( $0 \leq d_i < 4$ )对自身的修正. 我们得到当量纲为 $d_i$ 的超可重整项缩并成量纲为 $d_j$ 的算符时, 没有两次或更高的发散, 则有 $p = 4 - d_j - (4 - d_i) < 2$ , 即 $d_i - d_j < 2$ . 显然软项量纲可以取2, 3(按照上面的假设和定理, 我们不考虑 $d_i$ 和 $d_j$ 为0, 1的情况).
- 考虑有额外对称性的情况. 特别的对于 $\phi^*\phi\phi$ 和 $\phi\phi^*\phi^*$ 项, 会导致蝌蚪图的形成, 导致两次发散. 一般并不是软项(同样被我们上面所列的定理排除). 然而当标量场 $\phi$ 没有额外对称性时, 蝌蚪图才能存在, 否则被对称性禁止. 如在MSSM中, 所有的标量粒子总是带有规范群的荷, 因此对于MSSM而言,  $\phi^*\phi\phi$ 和 $\phi\phi^*\phi^*$ 也是软破缺项.

### 1.1.3 规范耦合常数的统一

最小超对称标准模型一个最大的成功也许就是预测了规范耦合常数的统一. 如图(1.1)所示, 在标准模型中, 三个相互作用无法交于一点. 而在MSSM中, 在一圈近似下, 三个耦合常数交于一点, 如图(1.2)所示. 一般的, 在建立超对称模型时, 我们经常要求新的模型不要破坏这个性质, 如在分立的超对称模型中(split SUSY), 还有后面一章我们将要涉及的直接的规范传导模型(见第二章第三节中的Landau极点问题).

在MSSM中, 我们有 $\beta$ 函数:

$$\beta_1 = \frac{g'^3}{4\pi^2} \left( \frac{5n_g}{6} + \frac{n_s}{8} \right). \quad (1.13)$$

$$\beta_2 = \frac{g^3}{4\pi^2} \left( -\frac{9}{6} + \frac{n_g}{2} + \frac{n_s}{8} \right). \quad (1.14)$$

$$\beta_3 = \frac{g_s^3}{4\pi^2} \left( -\frac{9}{4} + \frac{n_g}{2} \right). \quad (1.15)$$

$$(1.16)$$

其中 $n_g$ 表示夸克的代数(generation),  $n_s$ 表示Higgs超场的个数. 代入到耦合常数的重整化群方程, 我们得到关系式(设耦合常数在大统一能标相等):

$$\frac{1}{g^2(m_Z)} - \frac{1}{g_s^2(m_Z)} = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{3}{4} + \frac{n_s}{8} \right) \ln \left( \frac{M_{GUT}}{m_Z} \right), \quad (1.17)$$

$$\frac{1}{g^2(m_Z)} - \frac{3}{5g'^2(m_Z)} = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{-3}{2} + \frac{n_s}{20} \right) \ln \left( \frac{M_{GUT}}{m_Z} \right), \quad (1.18)$$

这里我们用了经典的耦合常数归一化. 我们发现方程右边的变量只有 $(n_s, M_{GUT})$ , 特别的与 $n_g$ 无关. 考虑到标准模型中, 弱电破缺时有:

$$g(m_Z) = -e(m_Z)/\sin\theta, \quad g'(m_Z) = -e(m_Z)/\cos\theta. \quad (1.19)$$

实验中观测可得 $e(m_Z)$ 和 $g_s(m_Z)$ 的值和 $\sin^2\theta = 0.23$ , 方程(1.17)左边完全可以确定. 也就是说最小超对称模型中耦合常数的统一限制了参数 $(n_s, M_{GUT})$ 的取值. 一般的, MSSM中的 $n_s = 2$ ,  $M_{GUT} \sim 10^{16}\text{GeV}$ 刚好完全符合唯象和理论要求. 实际上参数空间 $(n_s, M_{GUT})$ 的限制比想象中的严格. 因为不一样的 $n_s$ 预测的 $M_{GUT}$ 往往已经被质子衰变实验排除.

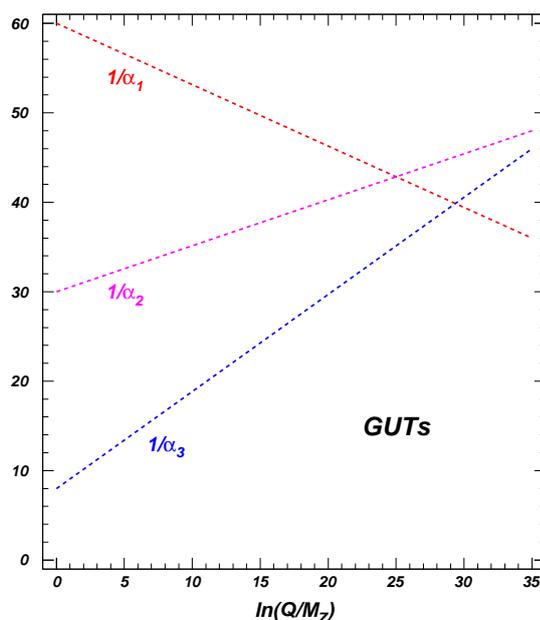


图 1.1: 标准模型中耦合常数的跑动

## 1.2 超对称破缺的传导机制

目前为止, 有大量的唯象上可行的超对称破缺机制, 或者说不可见区粒子的模型存在着. 一个有用的分类方法是根据它们产生的软破缺项的特点, 一般有:

- 是什么机制传导了超对称破缺效应.
- 哪一个场获得最大的F项或D项真空期望值.
- 什么是产生这些真空期望值和MSSM场之间耦合的主要效应? 树图的, 一圈的, 两圈的, 反常的, 非微扰的等等.

一般传导机制可以分为: 引力传导, 规范传导. 这两种传导机制下, 根据上面的后两条标准, 又可以分为很多种. 然而令人奇怪的是, 很多软项的性质与超对称破缺的机制不大相关, 而是与破缺的传导方式主要相关. 下面我们就简单介绍这两种传导机制的一般特点.

### 1.2.1 超对称破缺的引力传导

因为所有的粒子都有引力相互作用, 于是不可见区的粒子中的超对称破缺效应通过引力相互作用传递给可见区的粒子是很自然的想法, 也是比较经济的.

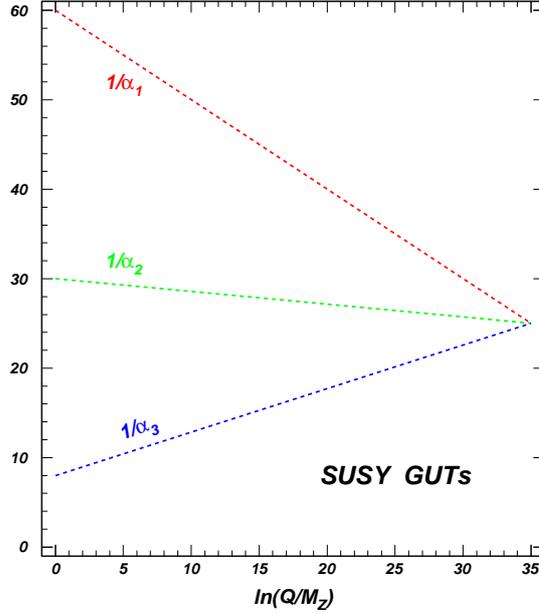


图 1.2: 超对称模型中耦合常数的跑动

一般我们考虑  $N = 1$  的超引力框架. 超对称被不可见区的粒子自发破缺, 然后通过 Planck 压低的不可重整相互作用传递到可见区的粒子.

传导超对称破缺的相互作用项, 可以认为是可见区的粒子与超引力中辅助场的 F 项真空期望值 (由某种不可见区粒子的动力学引起的) 之间的耦合. 因为超引力相互作用是 Planck 能标压低的, 通过简单的量纲分析, 我们可以得到软破缺超对称的质量项的估计:

$$m \sim \frac{F}{M_p}. \quad (1.20)$$

为了有 TeV 能标的质量, 要有  $F \sim 10^{22} \text{ GeV}$ , 也就是说在不可见区中超对称破缺的能标为  $\Lambda_s \sim \sqrt{F} \sim 10^{11} \text{ GeV}$ . 当然这里对超对称破缺能标的分析仅仅是量纲分析. 如果我们考虑 gaugino 凝聚导致的超对称自发破缺, 我们有不一样的 F 项和超对称破缺能标之间的关系— $F \sim \Lambda_s^3 / M_p$ , 其中  $\Lambda_s$  是超对称动力学破缺能标. 如此为了得到同样的软破缺质量项, 要求超对称破缺能标  $\Lambda_s \sim 10^{13} \text{ GeV}$ .

在  $N=1$  的超引力中, 由于对称性的限制我们可以很好把超引力的拉氏量归结到三个不同的泛函, 即 Kahler 势  $K$ , 超势  $W$  和规范动能函数  $f_{ab}$ , 其中  $a$  和  $b$  表示规范群的指标. 尤其势能的具体形式有:

$$V = e^{K/M_p^2} \left( D_i W K^{i\bar{j}} D_{\bar{j}} W^* - \frac{1}{3M_p^2} |W|^2 \right) + \frac{1}{8} f_{ab}^{-1} D^a D^b \quad (1.21)$$

在接着的章节中,尤其在第四章讨论超对称暴涨和重子起源机制中,我们将涉及一般的超势项和Kahler势项的分析.因此我们将在这里稍微详细的叙述一下引力传导的超对称破缺项中各项的由来.我们将不着眼于如何构造不同的超势或者Kahler势的形式而导致不一样的破缺模型,比如说反常传导的超对称破缺,退隐方式的引力传导破缺等等;而是关注于一般的超势或者Kahler势引起的在某个特定能标下的如何从势能方程(1.21)中产生各种软破缺项,以及其中所做的一些一般性假定.

下面我们例举出一般引力传导超对称破缺模型的假设及处理步骤.

- 在引力传导的超对称破缺机制中,我们假设存在一个不可见区,其中的场我们统一用 $Z_k$ 表示.一般要求 $Z_k$ 场在标准模型的规范群 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 下是中性的,同样我们假定最小超对称标准模型下的场,及可见区的场,不带有不可见区规范作用的量子数.
- 进一步假定存在这么一个规范对称性 $G_H$ ,其中在这个群的作用下,不可见区的粒子都是变化的,而可见区的粒子都是不变的.同样存在这么一个规范对称性 $G_V$ (不一定是SM的规范群),其中在这个群的作用下,不可见区的粒子都是不变的,而可见区的粒子都是会变化的—这是为了在可重整的水平上有 $W(\phi, Z) = W_v(\phi) + W_h(Z)$ —也就是说没有可见区粒子和不可见区粒子混合的三次方作用项.
- 超势项中不可重整项的处理,是我们特别感兴趣的地方.简单的估算会告诉我们,一般不可重整超势项导致额外的可见区粒子的质量项.我们在第四章将会继续这个问题的讨论,一般的它会导致宇宙学中的一些负面问题.
- 假定 $f_{ab}$ 中没有可见区规范群和不可见区规范群的混合(比第1,2点更严格的要求).
- 我们感兴趣的是探讨不可见区的粒子 $Z_k$ 的能标为 $\Lambda$ 的场空间区域,因为要让其在这个标度上产生超对称破缺.而且我们先让 $W_h$ 的常数部分待定(实际上为了抵消宇宙学常数,必须远大于 $\Lambda^3$ ).这里不同的 $k$ 用来表示不同等不可见区的粒子.

- 我们进一步定义可见区的粒子 $\phi_r$ 的能标为 $\kappa\Lambda^2$ 的场空间区域. 其中不同的 $r$ 指标表示不同的可见区的粒子. 这里 $\kappa \equiv M_p^{-1}$ . 当然如上所示, 如果在gaugino凝聚到时候这里的 $\Lambda_s$ 应该做相应的改变. 我们这里省略不讲.

有了上面的铺垫之后, 我们考虑一般的Kahler式如下:

$$\begin{aligned}
K(\phi, z) = & \sum_r |\phi_r|^2 + \sum_k |z_k|^2 + O(\kappa^2 z^{*2} z^2) \\
& + O(\kappa^2 z^* z^3) + O(\kappa^2 z^{*3} z) + O(\kappa^2 \phi^{*2} z^2) + O(\kappa^2 \phi^{*2} z^* z) \\
& + O(\kappa^2 z^{*2} \phi^2) + O(\kappa^2 z^* z \phi^2) + O(\kappa^2 \phi^* \phi z^2) \\
& + O(\kappa^2 z^{*2} \phi^* \phi) + O(\kappa^2 \phi^* z^* \phi z) + O(\kappa^2 \phi^{*2} \phi^2) \\
& + O(\kappa^2 \phi^* \phi^3) + O(\kappa^2 \phi^{*3} \phi) + \dots
\end{aligned} \tag{1.22}$$

其中一般的, 我们用小写的 $\phi, z$ 来表示相应超场 $\Phi, Z$ 的标量分量. 根据我们上面的假设, 这里的Kahler势我们省略了比 $O(\kappa^2 \Lambda^2)$ 更高阶的项. 从上面Kahler势的展开, 我们可以读出Kahler度规 $K_{ij}$ 的大小. 注意我们这里的指标 $(i, j) \supset (r, s...; k, l...)$ ,  $r, s$ 只用来标记可见区的粒子,  $k, l$ 只用来标记不可见区的粒子, 所以他们永远不会相等. 于是有 $K_{r\bar{s}} \sim O(1)$ ,  $K_{k\bar{l}} \sim O(1)$ 和 $K_{r\bar{k}} = K_{k\bar{r}} \sim O(\kappa^3 \Lambda^3)$ . 显然他们各自的逆与其自身有相同阶的大小<sup>4</sup>.

接着, 我们可以首先用 $W(\phi, Z) = W_v(\phi) + W_h(Z)$ 来分解势能(1.21). 容易发现在分解之后, 势能中关于可见区的粒子的相互作用项起主导作用的是大约为 $\kappa^4 \Lambda^8$ 阶的项<sup>5</sup>, 而且从其中我们可以读出可见区粒子的质量项, 三次相互作用项等. 同样重要的是, 假如考虑到不可重整的超势项, 与 $\Phi$ 相关的主要项是 $\kappa \Phi^2 Z^2$ . 当 $Z$ 场像我们上面估计的取 $\Lambda$ 阶大小时, 相当于我们在超势里面额外加入一项 $m_{3/2} \Phi^2$ .

### 1.2.2 超对称破缺的规范传导

规范传导模型是为了解决引力传导中的味道改变中性流(FCNC)问题而提出的, 因为传导的相互作用是标准模型中的规范相互作用, 与夸克的味道无关.

<sup>4</sup>就是说 $K_{r\bar{s}}^{-1} \sim O(1)$ ,  $K_{k\bar{l}}^{-1} \sim O(1)$ 和 $K_{r\bar{k}}^{-1} = K_{k\bar{r}}^{-1} \sim O(\kappa^3 \Lambda^3)$ . 最后一项来自于对 $K_{r\bar{k}}^{-1} K_{kl} + K_{r\bar{s}}^{-1} K_{sl} = \delta_{rl} \equiv 0$ 的要求, 由 $K_{kl} \sim O(1)$ ,  $K_{r\bar{s}}^{-1} \sim O(1)$ ,  $K_{sl} \sim O(\kappa^3 \Lambda^3)$ , 我们可以推断出 $K_{r\bar{k}}^{-1} \sim O(\kappa^3 \Lambda^3)$ . 其中我们省略了指标上画横线的标志, 因为总是应该有一个应该有横线, 而另一个没有, 而且两者是等价的.

<sup>5</sup>如同上面假设里的一样, 我们考虑 $Z \sim O(\Lambda)$ , 且 $\phi \sim O(\kappa \Lambda^2)$ . 于是我们可以用最简单的估计得到:  $W_h \sim \Lambda^3$ ,  $\partial W_h / \partial z \sim O(\Lambda^2)$ ,  $W_v \sim O(\kappa^3 \Lambda^6)$ ,  $\partial W_v / \partial \phi \sim O(\kappa^2 \Lambda^4)$ .

然而这个模型中也有自己固有的问题, 如 $\mu$ 问题等. 从建模型角度看最简单的规范传导模型把粒子分成三块: 不可见区, 信使区, 可见区. 其中不可见区的粒子没有标准模型规范群的量子数, 负责自发破缺超对称. 可见区的粒子特指最小超对称标准模型中的粒子. 信使区中的场负责把不可见区中的超对称破缺效应传递到可见区的粒子上, 因而它也有标准模型规范群的量子数.

我们首先考虑一个简单的模型. 有一个不可见区的粒子, 记为 $S$ . 有 $N_f$ 对信使场 $\Phi_i$ 和 $\bar{\Phi}_i$ , 比如说他们各自属于 $SU(5)$ 中 $5$ 和 $\bar{5}$ 表示<sup>6</sup>. 设他们之间的满足规范不变的相互作用的超势项:

$$W = S\Phi_i\bar{\Phi}_i \tag{1.23}$$

如果某种动力学破缺机制使得 $S$ 场获得真空期望值: $\langle S \rangle = M + \theta^2 F_s$ , 我们可以通过图(1.3)和图(1.4)中所示的圈图得到最小超对称标准模型中gaugino和squark的质量. 图中 $\phi$ 表示超场 $\Phi$ 的标量分量,  $\psi$ 表示 $\Phi$ 场的费米子分量. 它们的下标 $5$ 意

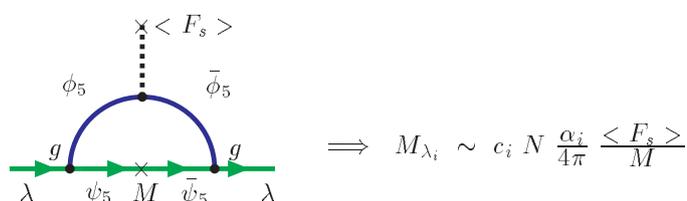


图 1.3: Gaugino质量产生图

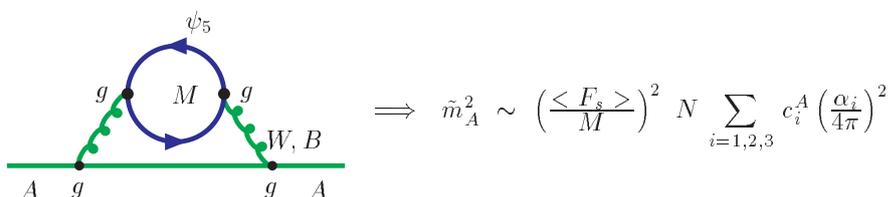


图 1.4: Squark质量产生图

指它们的表示. 此处的 $\lambda$ 表示gaugino粒子.  $W, B$ 表示标准模型中的规范波色子.

<sup>6</sup>从第(1.1.3)节, 我们知道加入一些 $SU(5)$ 或者别的任何的大统一规范群的完整多重态, 并不会对规范耦合常数的统一有影响.

如图所示, 我们得到相同阶大小的标量粒子和费米子质量, 因此也没有等级问题.

考虑到波函数重整化方法, 我们可以简单的通过解析计算得到gaugino粒子和标量粒子质量[16]. 考虑到下一章中将会用到gaugino质量公式, 这里我们简述一下如何得到图(1.3)中所示的结果. 首先考虑到超对称杨-米尔斯理论中有拉氏量:

$$\mathcal{L} \supset \int d^4x \int d^2\theta \frac{1}{4g^2} W^\alpha W_\alpha + h.c. \quad (1.24)$$

上面我们忽略了 $W_\alpha^i$ 中的色指标 $i$ , 写成分量形式:

$$W_\alpha^i = -i\lambda_\alpha^i + \theta_\alpha D^i - (\sigma^{\mu\nu}\theta)_\alpha F_{\mu\nu}^i - \theta\theta\sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda^{i\dagger}. \quad (1.25)$$

把(1.24)式中的 $\frac{1}{4g^2}$ 看成是某超场 $S$ 的标量分量. 考虑到耦合常数跟能标有关, 上面的拉氏量可以重新写出:

$$\mathcal{L} \supset \int d^4x \int d^2\theta \sum_i N_i(S, \mu) W_i^\alpha W_\alpha^i + h.c. \quad (1.26)$$

把 $W_\alpha^i$ 的分量场代入, 可以得到关于gaugino场 $\lambda_\alpha$ 的两阶项有:

$$\sum_i N_i(S_\phi, \mu) (\bar{\lambda}\not{\partial}\lambda) + [N_i(S, \mu)]_F (\lambda^T \epsilon \lambda) + h.c. \quad (1.27)$$

其中下标 $F$ 表示对相应的项求它的 $\theta\theta$ 分量. 用 $S_\phi$ 表示 $S$ 场的标量分量, 因此有:

$$N_i(S_\phi, \mu) = \frac{1}{4g_i^2(\mu)}. \quad (1.28)$$

归一化动能项, 我们得到gaugino质量有:

$$m_\lambda(\mu) = \left| \frac{[N_i(S, \mu)]_F}{4N_i(S_\phi, \mu)} \right| = g_i^2(\mu) |[N_i(S, \mu)]_F|. \quad (1.29)$$

接着考虑耦合常数的重整化群跑动方程. 假设能标 $M_x$ 大于任何信使场的质量, 从这个能标往下跑直到 $\mu$ , 我们有:

$$\frac{1}{g_i^2(\mu)} = \frac{1}{g_i^2(M_x)} - 2b_i^{(0)} \ln \left( \frac{M_1}{M_x} \right) - 2b_i^{(1)} \ln \left( \frac{M_2}{M_1} \right) - \dots - 2b_i^{(n)} \ln \left( \frac{\mu}{M_n} \right) \quad (1.30)$$

其中 $M_1, M_2, M_n$ 为信使场质量,  $b_i^{(n)}$ 表示考虑到所有质量小于 $M_n$ 信使场贡献的 $\beta$ 函数系数( $\mu dg_i(\mu)/d\mu = b_i g_i^3$ ). 考虑到由超势项(1.23), 有 $M_1 = M_2 = M_n = S_\phi$ <sup>7</sup>. 因此我们有:

$$N_i(S_\phi, \mu) = -b_i^{mess} \ln S_\phi + \dots \quad (1.31)$$

其中 $b_i^{mess} = b_i^{(0)} - b_i^{(n)}$ 表示信使场对 $b_i$ 的贡献. 等式右边的省略号表示与 $S_\phi$ 无关的项. 把 $N_i(S_\phi, \mu)$ 中的标量场改为相应的超场, 我们就得到 $N_i(S, \mu)$ :

$$N_i(S, \mu) = -b_i^{mess} \ln S + \dots \quad (1.32)$$

进一步的代入(1.29), 我们就得到了如图(1.3)所示的gaugino质量<sup>8</sup>.

### 1.3 $N = 1$ 超对称规范理论简介

#### 1.3.1 位相与模空间

在 $N = 1$ ,  $SU(N_c)$ 的SQCD(超对称QCD)中真空的相位可以归结为图(1.5).

- 当 $N_f < N_c$ 时( $N_f$ 表示SQCD中夸克的味道数), 理论中没有保持超对称的真空. 在经典水平上的模空间被ADS超势

$$W_{ADS} = C \left( \frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det M} \right)^{1/(N_c - N_f)}$$

完全提升(lift), 也就是说没有超对称真空, 不存在相应的模空间. 其中 $M_j^i = Q^i \bar{Q}_j$ 是规范不变量.  $C$ 为常数.

- 当 $N_f = N_c$ 时, 存在量子模空间, 夸克场有禁闭效应.
- 当 $N_c + 1 \leq N_f < 3N_c/2$ 时, 存在量子模空间. 理论处在自由的磁相位. 对于所有 $N_f \geq N_c + 1$ , 量子模空间是经典的模空间一致.
- 当 $3N_c/2 < N_f < 3N_c$ 时, 存在量子模空间. 理论中有共形不动点, 在 $N_f$ 的这个范围内, 理论中的场构造总是跑向这个不动点. 不跑动的耦合常数导致理论处在Coulomb位相.

<sup>7</sup>不同场在超势中的耦合常数可能不相等, 然而这样的耦合常数并不影响我们后面的结果.

<sup>8</sup>进一步如果信使场的质量不是简单有(1.23)式来提供, 则我们可以得到 $\frac{1}{g_i^2(\mu)} \sim b_i^{mess} \ln \det \mathcal{M}$ , 此时 $\mathcal{M}$ 为信使场质量矩阵.

- 当 $N_f > 3N_c$ 时, 存在量子模空间. 理论处在自由电相位.

我们知道规范理论中的位相, 也就是势能与粒子距离的关系, 与耦合常数的跑动密切相关(这一点可以从Wilson圈的真空期望值的计算看出). 因此相应的在上面位相的分类中, 对应三种不同的耦合常数跑到, 我们可以有最后三类位相. 第二类的特别之处在于, SQCD的对偶理论中, 我们完全可以不用夸克来描述, 理论中所有的无质量粒子都为色单态, 因此真空处在禁闭的位相.

关于模空间, 首先从 $N_f < N_c$ 时的ADS超势说起. 我们可以用规范不变量(见下面的方程(1.37)—(1.39)) 来表示D-flat方向[17, 18, 19](平坦方向更多细节见(4.2)节). 然而 $W_{ADS}$ 可以完全提升这些平坦方向, 而且使得 $M_j^i$ 获得一个真空期望值:

$$\langle M_j^i \rangle = (m^{-1})_j^i (\det m \Lambda^{3N_c - N_f})^{1/N_c}. \quad (1.33)$$

其中我们参数化相应方向的夸克场的质量为 $m_j^i$ . 在 $N_f < N_c$ 时, 当 $m_j^i$ 趋于零时<sup>9</sup>,  $\langle M_j^i \rangle$ 趋于无穷大.

然而这种情况在 $N_f \geq N_c$ 中不会发生. 尽管ADS超势在 $N_f \geq N_c$ 时不适用, 但简单的验证表明 $M_j^i$ 的真空期望值仍然适用. 因此方程(1.33)中的行列式贡献 $m^{N_f/N_c}$ ,  $N_f/N_c > 1$ , 使得在 $m$ 趋于零时,  $\langle M_j^i \rangle$ 有限或者为0. 因此超势项的量子修正并没有提升平坦空间, 或者说理论中存在量子模空间.

### 1.3.2 $N = 1$ 超对称规范理论的对偶

Seiberg在[9]中猜想 $N = 1$ 的超对称QCD理论中存在两个不同理论的对偶. 即在 $3N_c/2 < N_f < 3N_c$ , 规范群为 $SU(N_c)$ , 有 $N_f$ 个夸克味道的超对称QCD理论对偶于规范群为 $SU(N_f - N_c)$ , 同样有 $N_f$ 夸克味道的超对称QCD. Seiberg称 $SU(N_c)$ 的SQCD理论为电理论, 而称它的对偶为磁理论. 尽管不能证明这个对偶的存在, 但是Seiberg给出了一些非平庸的结果检验了这个猜测的可靠性. 可以归结为如下三个方面:

- 两个对偶理论的整体对称性相同. 整体对称性的反常也相等—这也是't hooft反常匹配的要求[20].

<sup>9</sup>一般的我们关注的理论应该是低能的有效理论, 因此理论中当夸克有质量时, 我们总是考虑积掉相应夸克后的红外低能有效理论.

- 两个对偶理论的模空间相同. 考虑到磁理论中有额外的超势项:

$$W = \lambda \widetilde{M}_i^j q_j \bar{q}^i \quad (1.34)$$

它们的规范不变量有一一对应关系:

$$\begin{aligned} M &\leftrightarrow \widetilde{M} \\ B_{i_1, \dots, i_{N_c}} &\leftrightarrow \epsilon_{i_1, \dots, i_{N_c}, j_1, \dots, j_{N_f - N_c}} b^{j_1, \dots, j_{N_f - N_c}} \\ \overline{B}^{i_1, \dots, i_{N_c}} &\leftrightarrow \epsilon^{i_1, \dots, i_{N_c}, j_1, \dots, j_{N_f - N_c}} \bar{b}_{j_1, \dots, j_{N_f - N_c}}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

其中 $M$ 和 $B$ 分别表示SQCD中的介子和重子,  $\widetilde{M}$ 和 $b$ 分别表示磁理论中的介子和重子.  $q$ 表示磁理论中的夸克. 在磁理论中的介子是一个基本的变量, 而电理论中则不是, 见方程(1.37).

- 对偶在夸克的质量形变下保持一致. 在原来 $SU(N_c)$ 规范对称下的SQCD理论中, 如果某种味道的夸克有一质量项, 积掉这个味道后得到一有效理论. 此时有效理论的对偶理论中规范群为 $SU(N_f - N_c - 1)$ , 有 $N_f - 1$ 个味道数. 换个顺序, 我们先对 $SU(N_c)$ 的SQCD做对偶变化, 再求它的有效理论, 则某个对偶的squark将得到真空期望值, 使得最后的对偶理论与上面从有效理论出发得到的对偶结果一致.

我们将接着就这三个非平庸的”证据”做些稍微详细的解释.

考虑SQCD, 其规范对称性为 $SU(N_c)$ , 有 $N_f$ 个味道数. 夸克超场用 $Q$ 表示(后面我们也将用 $Q$ 表示它的标量分量).  $Q^i$ 是 $SU(N_c)$ 中的 $N_c$ 表示,  $\overline{Q}_i$ 是 $SU(N_c)$ 中的 $\overline{N}_c$ 表示( $i = 1, 2, 3, \dots, N_f$ ). SQCD有整体对称性如下:

$$SU(N_f) \times SU(N_f) \times U(1)_B \times U(1)_R. \quad (1.36)$$

这里两个 $SU(N_f)$ 是夸克的味道对称性. 一般的我们有手征反常的 $U(1)_A$ 对称性, 组合超对称中的R对称性, 我们可以得到没有反常的 $U(1)_R$ [5, 11]. 夸克在整体对称性下的量子数有:

	$SU(N_f)$	$SU(N_f)$	$U(1)_B$	$U(1)_R$
$Q$	$N_f$	$\mathbf{1}$	1	$\frac{N_f - N_c}{N_f}$
$\overline{Q}$	$\mathbf{1}$	$\overline{N}_f$	-1	$\frac{N_f - N_c}{N_f}$

可以构建如下的规范不变量:

$$M_i^j = \bar{Q}^{jn} Q_{ni}, \quad (1.37)$$

$$B_{i_1, \dots, i_{N_c}} = Q_{n_1 i_1} \dots Q_{n_{N_c} i_{N_c}} \epsilon^{n_1, \dots, n_{N_c}}, \quad (1.38)$$

$$\bar{B}^{i_1, \dots, i_{N_c}} = \bar{Q}^{n_1 i_1} \dots \bar{Q}^{n_{N_c} i_{N_c}} \epsilon_{n_1, \dots, n_{N_c}}. \quad (1.39)$$

这里  $i = 1, 2, \dots, N_f$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_c$ .  $\epsilon$ 是全反对称张量.

磁理论中夸克在整体对称性下的量子数可以从上面模空间重子的对应可以计算出如下:

	$SU(N_f - N_c)$	$SU(N_f)$	$SU(N_f)$	$U(1)_A$	$U(1)_R$
$q$	$N_f - N_c$	$\bar{N}_f$	$\mathbf{1}$	$\frac{N_c}{N_f - N_c}$	$\frac{N_c}{N_f}$
$\bar{q}$	$\overline{N_f - N_c}$	$\mathbf{1}$	$N_f$	$-\frac{N_c}{N_f - N_c}$	$\frac{N_c}{N_f}$
mesino	$\mathbf{1}$	$N_f$	$\bar{N}_f$	0	$2 \frac{N_f - N_c}{N_f}$

知道这些量子数之后我们很容易验证电理论中的反常跟磁理论中的反常相等<sup>10</sup>. 其结果为:

$$\begin{aligned} SU(N_f)^3 & N_c \\ SU(N_f)^2 U(1)_R & -\frac{N_c^2}{2N_f} \\ SU(N_f)^2 U(1)_B & N_c/2 \\ U(1)_R & -N_c^2 - 1 \\ U(1)_R^3 & N_c^2 - 1 - 2\frac{N_c^4}{N_f^2} \\ U(1)_B^2 U(1)_R & -2N_c^2. \end{aligned}$$

于是我们证明了对偶的两个理论满足't hooft反常匹配条件<sup>11</sup>.

接着, 我们略微阐述一下上面列出的对Seiberg对偶非平庸检验的第二点—模空间的匹配. 首先来看一下SQCD中的模空间. 在SQCD中, D-terms可以用squark表示如下:

$$D^a = g(Q^{*jn}(T^a)_n^m Q_{mj} - \bar{Q}^{jn}(T^a)_n^m \bar{Q}_{mj}^*), \quad (1.40)$$

<sup>10</sup>注意下面计算反常时, 我们保留了一般文献中常用的结果和记号. 这里有两点需要特别注意. 第一, 我们一开始提到SQCD的整体对称性时, 特别强调我们只讨论没有反常的整体对称性—此时的反常, 是指这个整体对称性的流与两个规范对称性的流形成的三角反常为0, 并非三个整体对称性之间的反常. 第二, 下面的 $U(1)_R$ 反常指的是 $U(1)_R$ 与引力作用的三角反常. 有些文献也用记号 $tr[U(1)_R]$ 表示.

<sup>11</sup>'t hooft反常匹配条件就是说由基本组分粒子构成的反常必须与由复合粒子构成的反常相等[20]

其中 $T^a$ 是SQCD中规范对称 $SU(N_c)$ 的生成元. 势能有 $V = V_D = D^a D^a / (2g^2)$ , 我们这里假设SQCD没有任何的超势项<sup>12</sup>. 如果只考虑树图效应使得势能为0, 则相应的场空间我们称为经典模空间. 如果考虑量子修正使得势能为0, 则叫量子模空间. 考虑到矩阵 $T^a$ 无迹, 要求 $D^a = 0$ , 我们有 $(Q^{*jn} Q_{mj} - \bar{Q}^{jn} \bar{Q}_{mj}^*) = \rho I$ , 其中 $\rho$ 是任意的常数,  $I$ 是单位矩阵. 利用SQCD的规范对称把上面方程左边对角化, 设 $Q_i, \bar{Q}_i$ 的本征值相应为 $v_i, \bar{v}_i$ . 则上述方程变为: $|v_i|^2 = |\bar{v}_i|^2 + \rho$ . 显然这个方程有很多解, 我们也就得到了一个简并的模空间. 参考方程(1.37)中对重子, 介子场的定义, 我们知道模空间可以用规范不变量 $M, B, \bar{B}$ 来表征, 而且一般的它们之间有关系:

$$B_{i_1, \dots, i_{N_c}} \bar{B}^{j_1, \dots, j_{N_c}} = M_{[i_1}^{j_1} \dots M_{i_{N_c}]}, \quad (1.41)$$

其中中括号表示对下面的指标做全反对称化. 因此对偶理论中, 重子和介子的一一对应意味着模空间的一一对应. 考虑到对偶理论中有额外的超势项: $W = \lambda \widetilde{M}_i^j q_j \bar{q}^i$ ,  $M, q, \bar{q}$ 的运动方程导致对模空间自由度的限制. 仔细的计算得到对偶前后的理论模空间的自由度相等:

$$2N_f N_c - (N_c^2 - 1) = N_f^2 - (N_f - N_c)^2 + 1 \quad (1.42)$$

其中左边是电理论模空间的自由度,  $2N_f N_c$ 来自于夸克的自由度, 而减除掉的 $N_c^2 - 1$ 可以理解成模空间中一般 $SU(N_c)$ 对称性完全破坏了, Higgs机制使得有 $N_c^2 - 1$ 个无质量粒子获得质量. 等式右边的 $N_f^2$ 来自于 $\widetilde{M}$ 项, 因为在磁理论里面 $\widetilde{M}$ 是一个基本的变量, 不像电理论里面的 $M$ . 剩下的来自于对偶夸克的贡献和运动方程的减除.

最后考虑上面提到的第三个”证据”—Seiberg对偶在质量项的形变下自治. 考虑给一个夸克质量:

$$W = m \bar{Q}^F Q_F \quad (1.43)$$

这里的 $F$ 指标表示第 $F$ 个味道. 相应的我们在对偶理论里面有超势项:

$$W_d = \lambda \widetilde{M}_i^j \bar{q}^i q_j + m M_F^F. \quad (1.44)$$

其中 $\lambda$ 是没有量纲的耦合常数. 电理论中的 $M$ 与磁理论中 $\widetilde{M}$ 之间有关系:

$$\lambda \widetilde{M} = \frac{M}{\widehat{\Lambda}} \quad (1.45)$$

<sup>12</sup>我们这里考虑的是电理论, 而其对应的磁理论中一般可有规范不变的超势.

其中 $\hat{\Lambda}$ 为随意的一能标. 在这个对偶理论, 我们可以把 $M_F^F$ 积掉, 得到 $F$ 味道的squark有一个真空期望值:

$$\bar{\phi}^F \phi_F = -\mu m \quad (1.46)$$

其中 $\phi$ 表示对偶夸克 $q$ 对应的标量分量. 有效理论中的谱为:

	$SU(F - N - 1)$	$SU(F - 1)$	$SU(F - 1)$
$q'$	$\square$	$\bar{\square}$	$\mathbf{1}$
$\bar{q}'$	$\bar{\square}$	$\mathbf{1}$	$\square$
$M'$	$\mathbf{1}$	$\square$	$\bar{\square}$
$q''$	$\mathbf{1}$	$\bar{\square}$	$\mathbf{1}$
$\bar{q}''$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\square$
$S$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$M_j^F$	$\mathbf{1}$	$\square$	$\mathbf{1}$
$M_F^j$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\bar{\square}$
$M_F^F$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$

(1.47)

其中带一撇的场, 它的味道指标取值为 $i, j = (1, 2 \dots N_f - 1) \neq F$ , 色指标取值为 $(1, 2 \dots N_c - 1)$ . 带两撇的场, 它的味道指标取值为 $i, j = (1, 2 \dots N_f - 1) \neq F$ , 色指标取值为 $N_c$ . 低能的有效超势是:

$$W_{\text{eff}} = \frac{1}{\mu} (\langle \bar{q}^F \rangle M_F^j q_j'' + \langle q_F \rangle M_i^F \bar{q}''^i + M_F^F S) + \frac{1}{\mu} M' \bar{q}' q'. \quad (1.48)$$

积掉其中有质量的场, 剩下的超势项有:

$$W = \widetilde{M}'_i{}^j \bar{q}'^i q'_j \quad (1.49)$$

这是我们先做对偶再做积分得到的低能有效理论的超势. 与先做有效理论再做对偶得到的超势一致<sup>13</sup>. 更多具体的操作可见[14].

<sup>13</sup>后者的超势显然也是 $W = \widetilde{M}'_i{}^j \bar{q}'^i q'_j$ 形式.

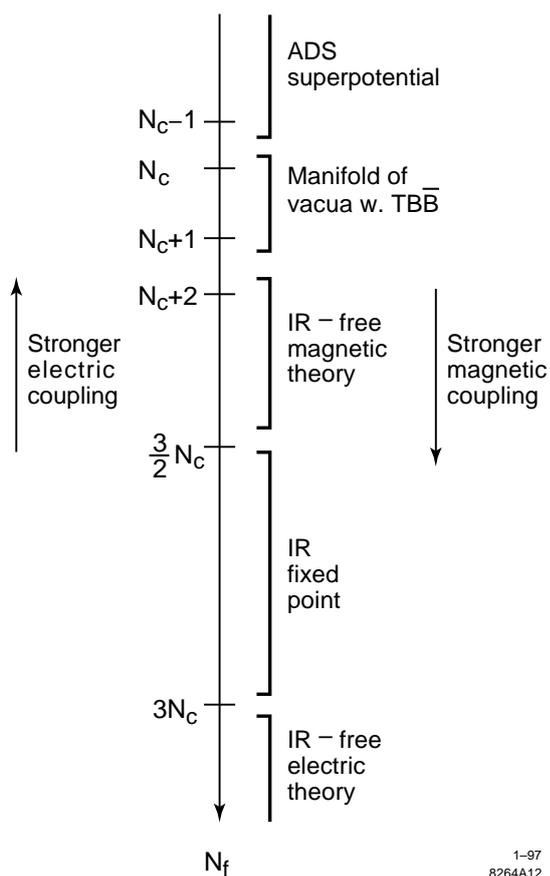


图 1.5: 超对称规范理论位相随  $N_f$  变化的关系图.



## 第二章 ISS模型及其一些应用

### 2.1 ISS模型和亚稳真空

#### 2.1.1 ISS模型

在上世纪八九十年代, 动力学超对称破缺模型方兴未艾. 然而因为诸多限制, 那时动力学超对称破缺的模型都比较特别. Witten在[22]中指出, 任何有质量的, 类矢量物质场的 $N = 1$ 超对称规范理论中, 它的Witten指标都不为0—也就是说理论中存在着超对称的真空. 为了避开这个限制, 使得理论中势能最小值为非超对称真空, 一般的人们都在考察手征性的超对称规范理论[23], 或者非手征的, 但是没有有质量粒子的超对称规范理论[24]. 已知的满足这些要求的动力学超对称模型看起来非常复杂. 应用到实际的唯象方面计算的模型中只会是更加复杂, 导致许多巴洛克式的超对称破缺及其传导的模型.

Intriligator, Seiberg和Shih(ISS)在[21]中提出了一种新颖的动力学超对称破缺模型—不可见区的粒子的势能既有保持超对称的真空, 也有非超对称的真空, 于是只要非超对称的真空寿命足够长, 则可以假设我们因为某种未知的原因而生活在非超对称的真空<sup>1</sup>, 而且我们可以在非超对称真空附近分析它的动力学. 模型中的亚稳真空使得ISS模型自动避免了一些超对称理论的限制, 比如Witten指标, R对称性等.

ISS模型中考虑了 $N = 1$ 的 $SU(N_c)$  SQCD, 设其中有 $N_f$ 个夸克味道, 满足条件 $N_c + 1 \leq N_f < 3N_c/2$ , 并且夸克带有质量项:  $W = mQ_i\bar{Q}_i$ . 我们可以发现这个模型有着如图(2.1)的势能. 在低能时, 有超对称破缺的极小值, 而在高能时却有超对称真空—真空的存在也与Witten指标的暗示一致.

从上一章的超对称规范理论中的对偶, 我们知道, 在 $N_c + 1 \leq N_f < 3N_c/2$ 时, 我们有红外自由的磁理论使得我们可以做微扰计算. 首先我们可以考虑类似与磁理论的Wess-Zumino模型<sup>2</sup>, 其中有整体对称性:

$$SU(N_f - N_c) \times SU(N_f)^2 \times U(1)_B \times U(1)' \times U(1)_R \quad (2.1)$$

<sup>1</sup>最简单的是在宇宙学中, 让有限温度效应来实现, 接着的章节中我们将会涉及到这个主题.

<sup>2</sup>如果把 $SU(N_f - N_c)$ 规范化, 则我们得到磁理论.

模型中的场及其在对称群下的表示有:

	$SU(N_f - N_c)$	$SU(N_f)$	$SU(N_f)$	$U(1)_B$	$U(1)'$	$U(1)_R$
$\Phi$	1	$\square$	$\bar{\square}$	0	-2	2
$q$	$\square$	$\bar{\square}$	1	1	1	0
$\tilde{q}$	$\bar{\square}$	1	$\square$	-1	1	0

其中 $\Phi_{ij}$ ,  $q_c^i$ 和 $\tilde{q}^{ic}$ 为手征超场, 指标取值 $i = 1 \dots N_f, c = 1 \dots N_f - N_c$ . 假设有经典的Kahler势:

$$K = \text{Tr} \Phi^\dagger \Phi + \text{Tr} q^\dagger q + \text{Tr} \tilde{q}^\dagger \tilde{q}. \quad (2.2)$$

树图水平上的超势有:

$$W = h \text{Tr} q \Phi \tilde{q} - h \mu^2 \text{Tr} \Phi. \quad (2.3)$$

其中第二项破缺(2.1)到 $SU(N_f - N_c) \times SU(N_f) \times U(1)_B \times 0 \times U(1)_R$ .  $\Phi$ 场的辅助项 $F_{\Phi_{ij}} \sim \tilde{q}^{jc} q_c^i - h \mu^2 \delta^{ij}$ , 因为 $\tilde{q}^{jc} q_c^i$ 的秩 $N_f - N_c$ 小于 $N_f$ ,  $F_{\Phi_{ij}}$ 不可能同时全部都为0, 也就是说整体对称性破缺了. 势能的极小值是:

$$V_{min} = N_c |h^2 \mu^4|, \quad (2.4)$$

极小值点是:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi_0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{q}^T = \begin{pmatrix} \tilde{q}_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\Phi_0$ 是 $N_c \times N_c$ 的矩阵,  $q$ 和 $\tilde{q}$ 是 $(N_f - N_c) \times (N_f - N_c)$ 的矩阵.  $\tilde{q}_0 q_0 = \mu^2 I_{N_f - N_c}$ ,  $I$ 表示单位矩阵. 在这极小值中, 保持最大整体对称性的真空构造是:

$$\Phi_0 = 0, \quad q_0 = \tilde{q}_0 = 0. \quad (2.5)$$

可以验算在一圈修正下, 这个极小点保持稳定.

如果我们把上面的 $SU(N_f - N_c)$ 整体对称性规范化, 我们有额外的势能项 $V_D$ :

$$V_D = \frac{1}{2} g^2 \sum_A (\text{Tr} q^\dagger T_A q - \text{Tr} \tilde{q} T_A \tilde{q}^\dagger)^2. \quad (2.6)$$

显然 $V_D$ 在式子(2.1.1)所示的极小点为0, 因此不影响原先的势能真空的分析.

尽管把 $SU(N_f - N_c)$ 规范化不影响超对称破缺点真空, 但是对场空间其他地方却有重大影响—甚至在场空间的某个区域导致超对称的恢复! 考虑一

般的在 $\Phi$ 场获得一个很大的真空期望值的时候,  $q$ 和 $\tilde{q}$ 获得质量 $\langle h\Phi \rangle$ . 考察在能标 $\langle h\Phi \rangle$ 下的有效理论, 积掉有质量的夸克场之后, 低能理论就是 $SU(N_f - N_c)$ 的纯杨-米尔斯理论, 其全纯的耦合常数是:

$$e^{-8\pi^2/g^2(E)+i\theta} = \left(\frac{\Lambda_L}{E}\right)^{3N_f-N_c} = \frac{h^{N_f} \det \Phi}{\Lambda_m^{3N_c-2N_f} E^{3N_f-3N_c}}. \quad (2.7)$$

其中 $E$ 表示任意一能标,  $\Lambda_L$ 表示低能有效理论的截断能标,  $\Lambda_m$ 表示磁理论的截断能标(超过这个能标时磁理论将成为强耦合的理论). 于是低能理论的超势有:

$$W_{low} = (N_f - N_c)(h^{N_f} \Lambda_m^{2N_f-3N_c} \det \Phi)^{1/N_f-N_c} - h\mu^2 \text{Tr} \Phi, \quad (2.8)$$

其中第一项来自于gaugino凝聚(贡献 $\sim \Lambda_L^3$ )和方程(2.7). 此时的超势不同于式子(2.3), 此时存在 $N_c$ 个超对称真空:

$$\langle h\Phi \rangle = \Lambda_m \epsilon^{2(N_f-N_c)/N_c} I_{N_f} = \mu \frac{1}{\epsilon^{(3N_c-2N_f)/N_c}} I_{N_f}, \quad (2.9)$$

其中 $\epsilon \equiv \frac{\mu}{\Lambda_m}$ . 综上所述我们可以大概画出势能与 $\Phi$ 关系图(2.1).

目前为止, 我们分析的始终是 $N_c + 1 \leq N_f < 3N_c/2$ 的磁理论, 它是红外自由的, 因此也不可能是一个完整的理论, 它存在一个紫外截断 $|\Lambda_m|$ . 一般的, 我们应该考虑紫外物理对上述结果的修正, 因为在大于 $|\Lambda_m|$ 能标时, 规范相互作用将是强耦合的. 然而, 如[21]中指出的, 只要满足

$$|\epsilon| = \left|\frac{\mu}{\Lambda_m}\right| \ll 1, \quad (2.10)$$

高能的修正都是次要的. 进一步的, 我们可以从对偶的电理论分析, 可以得到相同的结果. 我们下面只简单的看一下电理论中如何得到与此理论一致的超对称真空.

前面直接给出了电理论中的超势项<sup>3</sup> $W = mQ\tilde{Q} \equiv \text{Tr} mM$ ,  $M_{ij} = Q_i\tilde{Q}_j$ . 而磁理论中有 $W = h\text{Tr} q\Phi\tilde{q} - h\mu^2 \text{Tr} \Phi$ . 实际上我们可以通过电磁对偶得到两个超势项之间的联系. 至少我们可以一般的考虑电理论中有 $W = mQ\tilde{Q} \equiv \text{Tr} mM$ , 则在对偶理论中我们一般有:

$$W_{dual} = \frac{1}{\tilde{\Lambda}} \text{Tr} Mq\tilde{q} - \text{Tr} mM. \quad (2.11)$$

<sup>3</sup>这里我们先简单的假设所有夸克场 $Q$ 的质量都相等.

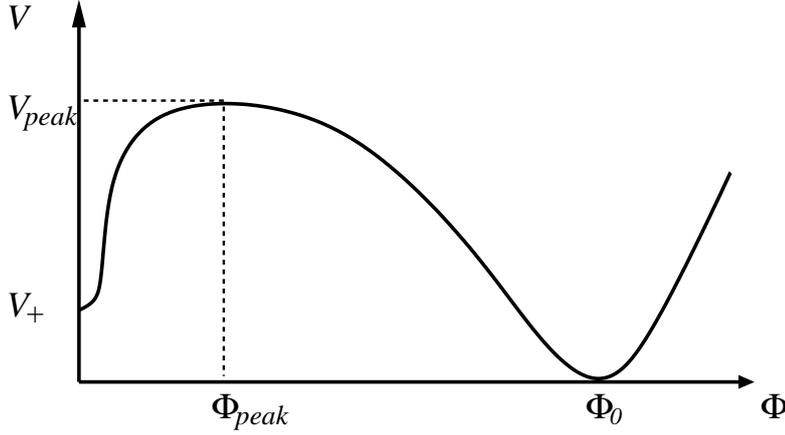


图 2.1:  $\Phi$  场的峰值大约为  $\mu$ ,  $\Phi_0 \gg \mu$ ,  $V_+, V_{peak} \sim \mu$ .

其中等式右边第一项是一般的磁理论中的规范不变量, 因为  $M$  是电理论中量纲为 2 的场, 需要一个有量纲的能标  $\hat{\Lambda}$  的压低. 等式右边第二项可以认为从电理论中做对偶变化得到. 分析理论中可调参数的各种极限情况, 保持理论的自洽, 可以有理论中各种能标关系[10]:

$$\Lambda^{3N_c - N_f} \Lambda_m^{3(N_f - N_c) - N_f} = (-1)^{N_f - N_c} \hat{\Lambda}^{N_f} \quad (2.12)$$

其中  $\Lambda$  和  $\Lambda_m$  分别是电理论和磁理论的截断能标. 此时只要电理论和磁理论间变量的对应关系有:

$$\Phi = \frac{M}{\sqrt{\alpha\Lambda}}, \quad h = \frac{\sqrt{\alpha\Lambda}}{\hat{\Lambda}}, \quad \mu^2 = m\hat{\Lambda}. \quad (2.13)$$

则我们可以得到电理论中的超对称真空  $\langle M \rangle = (\Lambda^{3N_c - N_f} \det m)^{\frac{1}{N_c}} \frac{1}{m}$  就是磁理论中的超对称真空(2.9). 其中  $\alpha$  为 Kahler 势中的耦合常数  $K = \frac{a}{\alpha|\Lambda|^2} \text{Tr} M^\dagger M + \dots$ .

### 2.1.2 亚稳真空的寿命

从图(2.1)中我们可以看到, 假如超对称真空时的场  $\Phi_0$  足够大, 而且势垒没有太低, 一般的我们可以得到足够长寿命的亚稳超对称破缺真空. 从方程(2.9)可以看出只要  $\epsilon$  足够小, 始终有  $\Phi_0 \gg 0$  (零点正是亚稳真空所在点), 从而保证亚稳真空度衰变几率足够小.

势垒的估计可以从经典势能出发, 从方程(2.3)出发, 有  $V_{cl} \supset |hq\Phi|^2 + |h\Phi\tilde{q}|^2$ , 为了保证最小势垒, 粒子衰变时跑的路径上, 应该尽量使得  $\Phi, q, \tilde{q}$  都要小. 于是

最经济的路线就是沿着亚稳的真空快速的爬到顶点, 有:

$$V_{peak} = N_f |h^2 \mu^4|, \quad (2.14)$$

在 $\Phi = 0, q = \tilde{q} = 0$ 时. 用薄墙近似[?, 26], 我们可以估算衰变几率 $e^S$ 中的 $S$ 有:

$$S \sim \frac{\Delta\Phi^4}{V_+} \sim \frac{1}{|\epsilon|^{4(3N_c - 2N_f)/N_c}} \gg 1. \quad (2.15)$$

这样的 $\epsilon$ 与我们上一节中要求低能理论足够有效的要求(方程(2.10))是一致的. 实际上, 要求亚稳真空的寿命足够长也非常容易达到. 现代宇宙学观测证实宇宙的寿命大约167亿年, 约为 $e^{40}$ 秒. 从方程(2.15)我们有足够大的参数空间可以实现 $S > 40$ .

### 2.1.3 ISS模型中的能标

ISS模型之后有许多发展, 我们将在以后的章节做些归纳总结. 这里及下一小节略微涉及实现ISS模型中合适的质量 $m$ 能标的一个简单的机制和它的两个应用[27, 28].

在[27]中, 模型包括三个部分:

- 第一部分的场构成某种超对称杨-米尔斯理论, 其非阿贝尔规范群记为 $G$ . 其中没有带电场. 设其特征能标记为 $\tilde{\Lambda}$ , 在这个能标之下, 理论变为强耦合. 这个部分存在的目的是为了动力学产生ISS模型中的质量能标. 进一步假设除了Planck能标,  $\tilde{\Lambda}$ 比别的能标都大.
- 第二部分的场用来破缺超对称. 特别的考虑类似ISS模型, 有一个超对称QCD理论, 规范群为 $SU(N_c)$ , 有 $N_f$ 个夸克 $Q_i, \tilde{Q}^j$ , 且有 $N_c + 1 \leq N_f < 3N_c/2$ . 电理论中的特征能标记为 $\Lambda$ , 磁理论的能标记为 $\Lambda_m$ . 唯一的区别是超势中没有必要有夸克的质量项, 而是假设由夸克与第一部分场之间的高维的耦合产生.
- 第三部分的场包括最小超对称标准模型(或者类似的标准模型的超对称推广), 及一些信使场(记为 $f$ 和 $\tilde{f}$ ). 同样的超势中没有必要包括信使场的质量项, 假设由信使场与第一部分场的高维耦合产生.

考虑到上面三个假设, 超势项可以写为:

$$W = \frac{1}{M_p} Q_i \tilde{Q}^i f \tilde{f} + \text{Tr} (W_\alpha^2) \left( \frac{1}{g_{SYM}^2} + \frac{1}{M_p^2} (Q_i \tilde{Q}^i + f \tilde{f}) \right). \quad (2.16)$$

其中 $W_\alpha$ 为超对称杨-米尔斯理论中的场强手征超场. 这里假设最小超对称标准模型的场没有与 $Q$ 和 $W_\alpha$ 的足够大的耦合项. 显然这样的超势项具体破缺了R对称性. 因此在能标 $\tilde{\Lambda}$ 之下, gaugino场发生凝聚, 有 $\langle \text{Tr} (W_\alpha^2) \rangle \sim \tilde{\Lambda}^3$ , 超对称QCD理论中的夸克和信使场的质量项有:

$$m_Q \sim m_f \sim \frac{\tilde{\Lambda}^3}{M_p^2}. \quad (2.17)$$

根据上面关于能标的假设: $\Lambda \ll \tilde{\Lambda} \ll M_p$ . 因此当能标小于 $\Lambda$ 时(设上面的质量项 $m_Q \sim m_f \ll \Lambda$ ), 电理论是强耦合的, 从磁理论的角度看, 此时的超势项有:

$$W = \Phi_i^j q^i \tilde{q}_j + m_Q \Lambda \text{Tr} \Phi + (m_f + \frac{\Lambda}{M_p} \text{Tr} \Phi) f \tilde{f}. \quad (2.18)$$

其中 $q$ 和 $\tilde{q}$ 是磁理论中的夸克. 这里还考虑到对应关系(2.13)中的 $\alpha = 1$ . 此时理论中就有亚稳的超对称破缺真空[21].

方程(2.18)中的末两项可以用超场形式表示为:

$$W = S f \tilde{f}, \quad (2.19)$$

其中 $S$ 场的真空期望值为:

$$\langle S \rangle \equiv s + \theta^2 F_s \simeq \frac{\tilde{\Lambda}^3}{M_p^2} + \theta^2 \frac{\Lambda^2 \tilde{\Lambda}^3}{M_p^3}. \quad (2.20)$$

其中我们利用了亚稳真空有 $F_\Phi \sim m_Q \Lambda = (\Lambda \tilde{\Lambda}^3 / M_p^2)$ . 如此接下来的超对称破缺的传导就跟第一章中讲到的间接规范传导一样了.

#### 2.1.4 另一个亚稳真空模型

这小节我们将构建亚稳的O'Raifeartaigh模型[28]. 实际上, ISS模型在磁理论中来看, 在低能时退化到O'Raifeartaigh模型, 因此Dine, Feng, Silverstein他们就在ISS模型之后, 考虑到超势中的不可重整项, 提出了一个更简单的亚稳超对

称破缺模型(指不涉及对偶理论). 跟上一节列出的三部分场内容类似, 除了第二部分中用超对称QCD破缺超对称改成由一些简单的单态场代替.

理论中的超势有:

$$W = \phi_1 \frac{\phi_2^3}{3M_*} + Z \left( \frac{\phi_2^2}{2} \left[ 1 + \lambda_1 \frac{Z}{M_*} \right] + \frac{\phi_2 f \tilde{f}}{M_*} \right) - \text{Tr}(W_\alpha^2) \left( \frac{Z}{2M_*} + \frac{1}{g_{SYM}^2} \right) + \phi_2 f \tilde{f} + \lambda_2 \frac{(f \tilde{f})^2}{M_*}, \quad (2.21)$$

其中 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 为耦合常数.  $M_*$ 也可以替换成任意的一个高能截断能标.  $\phi_1, \phi_2, Z$ 是一些单态场. 同样在能标 $\tilde{\Lambda}$ 之下, 超对称杨-米尔斯理论中gaugino凝聚, 超势中相应的项有:

$$W \supset -\frac{\tilde{\Lambda}^3}{2M_*} Z. \quad (2.22)$$

正是这个线性项使得模型破缺了超对称.

在没有信使场 $f$ 和 $\tilde{f}$ 时, 上面超势项中的超对称破缺由 $\phi_1$ 和 $Z$ 场提供:

$$F_{\phi_1} \approx \frac{\mu^3}{3M_*}, \quad F_Z \approx -\frac{\mu^4}{3M_*^2}. \quad (2.23)$$

其中 $\mu^2 \sim \tilde{\Lambda}^3/M_*$ ,  $\phi_2$ 场有真空期望值:

$$\phi_0 \equiv \langle \phi_2 \rangle \approx \frac{\mu^2}{1 + 2\lambda_1 Z/M_*} - \frac{8\mu^4}{M_*^2 [1 + 2\lambda_1 Z/M_*]^3}, \quad (2.24)$$

但是 $\phi_1$ 场和 $Z$ 的某个组合在树图时没有质量, 是平坦方向<sup>4</sup>. 简单的计算一圈的Coleman-Weinberg有效势可以知道平坦方向被提升, 而且树图时无质量的场被稳定在零点.

Dine, Feng, Silverstein为了建立一个实际的模型, 在上面涉及到超势中的不可重整项. 其实如果仅仅为了调查O’Raifeartaigh模型中的亚稳真空, 对于破缺超对称场而言, 我们可以只考虑它的可重整超势项如下:

$$W = MAB + \lambda Z(A^2 - \mu^2) + \epsilon MZ^2. \quad (2.26)$$

<sup>4</sup>注意, 也许这里的F-term并不明显. 计算时因为我们考虑到 $F_{\phi_2}$ 中涉及到三个场, 于是总是存在一个零解, 因此剩下的我们应该统筹考虑:

$$V_{DFS} = |F_{\phi_1}|^2 + |F_Z|^2. \quad (2.25)$$

其中下标DFS指代这个特殊模型的势能. 此时显然从 $V_{DFS}$ 存在零解(让此时的 $M_*$ 区域无穷更容易看清楚这一点), 而且它有局域极小值—方程(2.24).

其中 $\lambda$ 为耦合常数,  $\epsilon$ 为一小量,  $M$ 为任意的能标.  $Z, A, B$ 都是单态场. 简单的计算表明: 在原点( $Z=A=B=0$ )附近有一个亚稳真空, 而在 $Z = \lambda\mu^2/(2\epsilon M)$ 处是保持超对称的真空.

同样这个模型可以利用类似的动力学来改进. 把方程(2.26)中的 $\mu^2$ 项用 $Z$ 场跟场强超场 $W^\alpha$ 的耦合项代替如下:

$$W = MAB + \lambda ZA^2 + \left(-\frac{1}{g_{SYM}^2} + \frac{Z}{M_*}\right) \quad (2.27)$$

基掉超对称杨-米尔斯理论中的规范相互作用后, 我们有:

$$W = MAB + \lambda ZA^2 + \Lambda^3 e^{3Z/b_0 M_*}. \quad (2.28)$$

其中 $b_0$ 是理论中的 $\beta$ 函数的系数. 展开 $e$ 指数到两阶项, 就可以得到方程(2.27). 与前面模型相比, 这里考虑了gaugino凝聚更高阶的结果.

## 2.2 ISS模型中的形变

ISS模型提出之后, 立刻受到许多关注. 大约可以分成下面几类:

- 寻找类似的亚稳的真空, 特别有很多从超弦理论构造类似的超对称破缺真空, 如[29, 30, 31]. 也有从纯粹有效理论角度考虑, 把以前的O’Raifeartaigh模型式样翻新了一下, 构造出亚稳的O’Raifeartaigh模型, 正如我们上小节提到的Dine等人的工作[28].
- 完善ISS模型, 使得其中出现的中假设的参数. 比如如何从动力学上的演化自然的得到ISS模型中的小参数 $\epsilon$ . 再比如如何破缺方程(2.3)中的R对称性. 一般的我们可以通过ISS模型的形变或者加入额外的R荷不是1和2的超场[32], 使得亚稳真空偏离 $\Phi$ 场的原点得到.
- 接着ISS的动力学破缺超对称之后, 考虑如何把超对称破缺的效应传导到可见区的粒子也是一个重要的问题. 如引力传导[33], 规范传导[34, 35, 36]的模型.
- 温度效应. 考虑到早期宇宙的温度效应, 我们可以得到在高温的时候原来的超对称真空被提升了, 超过某个临界温度, 甚至比原来的亚稳真空还高. 因此我们可以相信因为早期宇宙的相变, 我们生存在ISS模型的亚稳真空中. 但温度降低的时候, 因为遂穿效应太小而我们至今还在亚稳真空.

- 其余的, 可以用ISS模型来提升KKLT中的AdS真空, 或者探讨一些亚稳真空导致的具体不同的低能唯象等等.

特别的我们将选择其中的两个主题, ISS模型的形变和它的规范传导做些讨论. 紧接着ISS模型的提出, 有三种简单的变形的模型被提出来研究各种唯象问题[37, 52, 39], 我们将着重探讨前两种, 更多的模型参考[40].

### 2.2.1 ISS模型的 $Z\tilde{Z}$ 形变

ISS模型中许多的唯象问题使得Kitano等人在[37]中讨论了一个简单的形变模型. 在ISS模型中, 方程(2.3)和亚稳真空(2.5)存在R对称性<sup>5</sup>, 这个R对称性禁止了gaugino质量项的出现. 为了得到恰当的低能超对称唯象, 我们必须把这个R对称性破缺了, 最简单的方法也是我们接着要讨论的是引入 $\Phi^2$ 项[38]或者其中的一部分[37].

首先我们参数化磁理论中场如下:

$$\delta\Phi_{ij} = \begin{pmatrix} Y_{IJ} & Z_{Ia} \\ \tilde{Z}_{aI} & \hat{\Phi}_{ab} \end{pmatrix}, \quad \delta q_i = \begin{pmatrix} \chi_{IJ} \\ \rho_{Ia} \end{pmatrix}, \quad \delta\tilde{q}_i = \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_{IJ} \\ \tilde{\rho}_{Ia} \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

其中我们把指标 $i, j$ 分成两部分,  $I, J = 1 \dots N_f - N_c$ 和 $a, b = 1 \dots N_c$ . Kitano等人在[37]中在超势项(2.3)中加入了额外的一项:

$$\delta W = h \text{Tr} [m_z Z \tilde{Z}], \quad (2.30)$$

并且假设在电理论中夸克的质量项并非全等, 而是:

$$W_{mass} = m(Q_I \tilde{Q}_I) + m'(Q_a \tilde{Q}_a), \quad (2.31)$$

相应的在磁理论中有质量项,

$$W_{mass}^{mag.} = \bar{m}^2 \text{Tr} Y + \bar{\mu} \text{Tr} \hat{\Phi}, \quad (2.32)$$

其中 $\bar{m} \equiv \sqrt{m\hat{\Lambda}}$ 和 $\bar{\mu} = \sqrt{m'\hat{\Lambda}}$ . 此时理论中的整体对称性有: $SU(N_f - N_c) \times SU(N_c) \times U(1)_B$ . Kitano等人的这些假设至少有下面四个好处:

<sup>5</sup>gaugino凝聚时存在破缺R对称性的超势项, 然而gaugino凝聚项(2.8)在低能时总是被能标 $\Lambda_m$ 幂次压低, 一般总是被忽略[41].

- 形变(2.30)明显破坏了R对称性, 使得ISS模型可以用于构造更实际的超对称破缺模型.
- 形变(2.30)导致的真空结构与ISS模型的类似, 基本不需要额外的对超对称破缺真空的分析.
- 对超势中质量项的变化, 减小了ISS模型中的味道对称性, 从而为避免Landau极点问题创造了合适的条件.
- 只要三个参数 $\bar{m}, \bar{\mu}, m_z$ , 就可以使得我们有足够的空间让亚稳真空的衰变率任意小.

用分量场 $Y, Z, \tilde{Z}$ 等展开计算之后, 我们可以发现类似与ISS的亚稳真空有:

$$\rho\tilde{\rho} = \frac{m_z^2}{\bar{m}^2} Z\tilde{Z} = \text{diag}(\bar{\mu}^2, \dots, \bar{\mu}^2, 0 \dots 0), \quad \chi\tilde{\chi} = \bar{m}^2 \mathbf{1}_{N_F - N_C}, \quad (2.33)$$

$$Y = -\frac{\bar{\mu}^2}{m_z} \mathbf{1}_{N_F - N_C}, \quad \hat{\Phi} = -\frac{\bar{m}^2}{m_z} \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0),$$

$$V_{\text{lower}} = (N_C - n) |h\bar{\mu}^2|^2, \quad (2.34)$$

亚稳真空的形状可以表示成图(2.2). 此时 $\Phi$ 只是略微偏离原点, R对称性在低能时有一个小的自发破缺过程. 由于 $V_{\text{lower}}$ 比ISS模型中的亚稳真空大, 一般的我们需要担心是否形变之后的超对称破缺真空足够稳定. 我们知道此时势垒的高度为 $O(\bar{\mu}^4)$ , 而 $\langle \hat{\Phi} \rangle_{\text{lower}}$ 和 $\langle \hat{\Phi} \rangle_{\text{ISS}}$ 之间的距离为 $O(\bar{m}^2/m_z)$ . 假如 $\bar{m} \gg \bar{\mu} \sim m_z$ , 则 $\Phi$ 场极值的距离相对于势垒而言足够大, 也就是说同样我们可以用三角近似计算衰变几率 $e^S$ 中的作用量 $S$ 如下:

$$S \sim \left( \frac{\bar{m}}{\bar{\mu}} \right)^4 \left( \frac{\bar{m}}{m_z} \right)^4.$$

利用上面的假设, 我们得到 $S \gg 1$ . 也就是说在形变之后产生的新的亚稳真空的寿命也足够长.

类似ISS模型, 可以考虑在 $\hat{\Phi}, Y$ 和获得一个大的真空期望值时, 夸克场有一个大的质量, 在能量小于这个质量的时候, 有效理论中可以积掉这些夸克. 进一

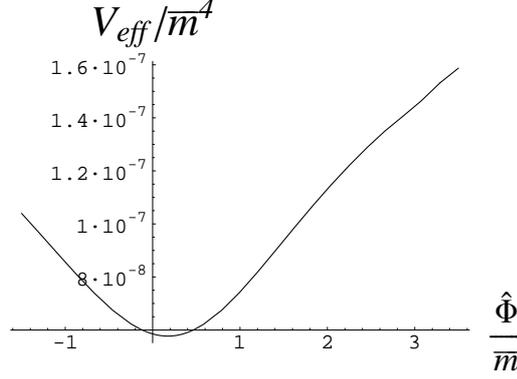


图 2.2:  $Z\tilde{Z}$ 形变之后的一圈有效势: 图中取定了 $m_z = \bar{m}/3, \bar{\mu} = \bar{m}/100$ . 临界点是 $\hat{\Phi} = 0.1747\bar{m}$ .

步的, 在能量小于 $hm_z$ 的时候, 我们可以积掉 $Z, \tilde{Z}$ 场. 得到 $SU(N_f - N_c)$ 的纯超对称杨-米尔斯理论, 其超势有:

$$W = -h\bar{m}^2 Y - h\bar{\mu}^2 \hat{\Phi} + (N_f - N_c)\Lambda_{\text{eff}}^3.$$

其中 $\Lambda_{\text{eff}}$ 是在能标 $\langle hY \rangle$ 和 $\langle h\hat{\Phi} \rangle$ 时由积分的匹配条件产生的有效能标.

$$\Lambda_{\text{eff}}^3 = \langle hY \rangle \langle h\hat{\Phi} \rangle^{\frac{N_c}{N_f - N_c}} \Lambda_m^{\frac{2N_f - 3N_c}{N_f - N_c}}.$$

此时我们可以得到超对称真空的取值有:

$$\langle h\hat{\Phi} \rangle = \bar{m}^{\frac{2(N_f - N_c)}{N_c}} \Lambda_m^{\frac{3N_c - 2N_f}{N_f - N_c}}, \quad \langle hY \rangle = \frac{\bar{\mu}^2}{\bar{m}^{2(2N_c - N_f)/N_c}} \Lambda_m^{\frac{3N_c - 2N_f}{N_c}}.$$

### 2.2.2 ISS模型的 $\Phi^2$ 形变

相对于Kitano等人的 $Z\tilde{Z}$ 修正, Giveon和Kutasov在[38]中考虑更为一般的 $\Phi^2$ 修正. 得到了跟ISS模型和 $Z\tilde{Z}$ 修正非常不一样的亚稳真空构造.

一般的, 考虑ISS模型的 $\Phi^2$ 修正, 因为ISS模型中破缺超对称的秩条件被破坏, 我们会得到额外的超对称真空. Giveon和Kutasov考虑的磁理论中的超势项:

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{\Lambda} \tilde{q}_i M_j^i q^j + \frac{\alpha'}{2} \text{Tr} M^2 - m \text{Tr} M. \quad (2.35)$$

各个场的场方程有:

$$\begin{aligned} M_j^i q^j &= 0, \\ \tilde{q}_i M_j^i &= 0, \\ \frac{1}{\Lambda} \tilde{q}_i q^j &= m\delta_i^j - \alpha' M_i^j. \end{aligned} \quad (2.36)$$

从上述方程我们知道 $M$ 满足矩阵方程:

$$mM = \alpha' M^2, \quad (2.37)$$

暗示我们 $M$ 可以有两种解:0和 $\frac{m}{\alpha}$ . 写成矩阵形式:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{\alpha} I_{N_f-k} \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

其中 $k = 0, 1, \dots, N_f$ . 把这个 $M$ 代入场方程组得到:

$$\tilde{q}q = \begin{pmatrix} m\Lambda I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\tilde{q}q$ 的秩最多为 $N_f - N_c$ , 所以 $k \leq N_f - N_c$ . 于是我们最后得到磁理论中的真空个数为:

$$N_{\text{mag}} = 1 + \sum_{k=0}^{N_f-N_c-1} (N_f - N_c - k) = 1 + \frac{1}{2}(N_f - N_c)(N_f - N_c + 1).$$

其中1对应于在 $k = N_f - N_c$ .

$\Phi^2$ 修正的ISS模型, 其亚稳真空构造也大不一样. 考虑到上一节电磁理论的对应:

$$h = \frac{\sqrt{\alpha}\Lambda}{\hat{\Lambda}}, \quad \mu^2 = m\hat{\Lambda}, \quad \mu_\phi = \alpha'\hat{\Lambda}^2, \quad (2.39)$$

磁理论中超势可以重新写成:

$$\begin{aligned} W_{\text{mag}} &= h\tilde{q}_i\Phi_j^i q^j - \text{Tr} \left( h\mu^2\Phi - \frac{1}{2}h^2\mu_\phi\Phi^2 \right) \\ &= \frac{1}{\hat{\Lambda}}\tilde{q}_i M_j^i q^j + \text{Tr} \left( \frac{1}{2}\alpha M^2 - mM \right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

同样的超对称真空也可以重新写成:

$$\begin{aligned} h\Phi &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu^2}{\mu_\phi} I_{N_f-k} \end{pmatrix}, \\ \tilde{q}q &= \begin{pmatrix} \mu^2 I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

为了构建亚稳的超对称真空的方便, 把 $(N_f - k) \times (N_f - k)$ 矩阵分解成两部分:

$$h\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h\Phi_n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu^2}{\mu_\phi} I_{N_f-k-n} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{q}q = \begin{pmatrix} \mu^2 I_k & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

其中 $\varphi$ 和 $\tilde{\varphi}$ 是 $n \times (N_f - N_c - k)$ 的矩阵. 超对称真空对应于 $h\Phi_n = \frac{\mu^2}{\mu_\phi} I_n$ ,  $\varphi = \tilde{\varphi} = 0$ .

考虑到一阶修正, 我们可以验证在 $\langle h\Phi \rangle = 0$ 点附近仍然有局域的极小值, 即亚稳的超对称破缺真空.

$$V_{1-loop} = b|h^2\mu|^2 \text{Tr} \Phi_n^\dagger \Phi_n, \quad (2.41)$$

其中 $b$ 是一个常数.

$$b = \frac{\ln 4 - 1}{8\pi^2} (N_f - N_c). \quad (2.42)$$

代入式子(2.2.2)和(2.2.2), 展开一圈势能项(这里我们假设了 $n = N_f - k$ 的特殊情形, 实际上在 $n < N_f - k$ 时同样也有[38]):

$$V/|h|^2 = |\Phi_n\varphi|^2 + |\tilde{\varphi}\Phi_n|^2 + |\tilde{\varphi}\varphi - \mu^2 I_n + h\mu_\phi\Phi_n|^2 + b|h\mu|^2 \text{Tr} \Phi_n^\dagger \Phi_n. \quad (2.43)$$

考察在 $\varphi = \tilde{\varphi} = 0$ 点的极小值, 对 $V$ 对 $\Phi_n$ 求导, 得到势能的极点在:

$$h\Phi_n = \frac{\mu^2\mu_\phi^*}{|\mu_\phi|^2 + b|\mu|^2} I_n \simeq \frac{\mu^2\mu_\phi^*}{b|\mu|^2} I_n, \quad (2.44)$$

此时势能大小为:

$$V \simeq n|h\mu^2|^2. \quad (2.45)$$

显然比ISS模型中的亚稳真空要大.

### 2.2.3 ISS模型的 $(q\tilde{q})^2$ 形变

另一个唯象上也许可行的ISS模型的形变[39], 在磁理论中加入对偶的夸克相关项. 它的超势项和Kahler势项有:

$$W = \text{Tr}(qM\tilde{q}) + m^2 \text{Tr} M + \frac{\epsilon}{\Lambda} \text{Tr}(q\tilde{q})^2, \quad (2.46)$$

$$K = M^\dagger M + q^\dagger q + \tilde{q}\tilde{q}^\dagger, \quad (2.47)$$

为了方便, 接着我们可以分解  $M$ ,  $q$ ,  $\tilde{q}$  和  $m$  如下:

$$M = \begin{pmatrix} Y & Z \\ \tilde{Z} & \hat{\Phi} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} \chi \\ \rho \end{pmatrix}, \quad \tilde{q} = \begin{pmatrix} \tilde{\chi} \\ \tilde{\rho} \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} m\delta_{IJ} & 0 \\ 0 & \tilde{m}\delta_{ab} \end{pmatrix}$$

其中指标  $I, J = 1 \dots N_f - N_c$ ,  $a, b = 1 \dots N_c$ . 代入超势项和Kahler势项, 则有:

$$\begin{aligned} W &= \text{Tr} \left[ \chi Y \tilde{\chi} + \chi Z \tilde{\rho} + \tilde{\chi} \tilde{Z} \rho + \rho \hat{\Phi} \tilde{\rho} + m^2 Y + \tilde{m}^2 \hat{\Phi} \right] \\ &\quad + \frac{\epsilon}{\Lambda} \text{Tr} \left[ (\chi \tilde{\chi})^2 + (\chi \tilde{\rho})(\tilde{\chi} \rho) + (\chi \tilde{\chi})(\chi \tilde{\rho}) + (\chi \tilde{\rho})(\rho \tilde{\rho}) + (\rho \tilde{\chi})(\chi \tilde{\chi}) \right. \\ &\quad \left. + (\rho \tilde{\rho})(\rho \tilde{\chi}) + (\rho \tilde{\chi})(\chi \tilde{\rho}) + (\rho \tilde{\rho})^2 \right], \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$K = |Y|^2 + |Z|^2 + |\tilde{Z}|^2 + |\hat{\Phi}|^2 + |\chi|^2 + |\rho|^2 + |\tilde{\chi}|^2 + |\tilde{\rho}|^2. \quad (2.49)$$

利用磁理论中的对称性, 我们总是可以做一个变换使得  $Z = \tilde{Z} = \rho = \tilde{\rho} = 0$  以及

$$M = \begin{pmatrix} Y_{ab} \delta_{ab} & 0 \\ 0 & \Phi_{AB} \delta_{AB} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} \chi_{ab} \delta_{ab} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{q} = \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_{ab} \delta_{ab} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

仔细写出此时每个场的场方程:

$$0 = \frac{\partial W}{\partial Y} = \chi \tilde{\chi} + m^2, \quad (2.51)$$

$$0 \neq \frac{\partial W}{\partial \Phi} = \tilde{m}^2, \quad (2.52)$$

$$0 = \frac{\partial W}{\partial \chi} = \left[ Y + \frac{2\epsilon}{\Lambda} (\chi \tilde{\chi}) \right] \tilde{\chi}, \quad (2.53)$$

$$0 = \frac{\partial W}{\partial \rho} = \frac{\epsilon}{\Lambda} \tilde{\chi} (\chi \tilde{\chi}), \quad (2.54)$$

$$0 = \frac{\partial W}{\partial \tilde{\chi}} = \left[ Y + \frac{2\epsilon}{\Lambda} (\chi \tilde{\chi}) \right] \chi, \quad (2.55)$$

$$0 = \frac{\partial W}{\partial \tilde{\rho}} = \frac{\epsilon}{\Lambda} \chi (\chi \tilde{\chi}). \quad (2.56)$$

我们发现显然第二个方程导致了超对称破缺. 一般的势能项可以写成:

$$V_{\text{tree}} = |\chi \tilde{\chi} + m^2|^2 + |\tilde{m}^2|^2 + \left[ \left| Y + \frac{2\epsilon}{\Lambda} \chi \tilde{\chi} \right|^2 + \left| \frac{\epsilon}{\Lambda} (\chi \tilde{\chi}) \right|^2 \right] (|\chi|^2 + |\tilde{\chi}|^2). \quad (2.57)$$

极值点在

$$Y + \frac{2\epsilon}{\Lambda} \chi \tilde{\chi} = 0 \quad (2.58)$$

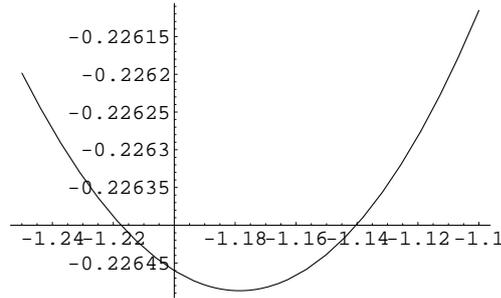


图 2.3:  $q\bar{q}$ 形变之后的一圈有效势与模场 $\hat{\Phi}$ 关系图: 图中纵轴代表 $V_{1-loop}/m^4$ , 横轴代表 $\hat{\Phi}/m$ . 图中我们还固定了一些额外的参数. 如 $\epsilon = 1$ ,  $\rho, \tilde{\rho}, Z, \tilde{Z}$ 场的质量分裂为 $\tilde{m}^2 = 10m^2$ ,  $Y, \chi, \tilde{\chi}$ 的质量为 $m$ . 紫外的能标截断 $\Lambda = 10m$

此时的势能大小为:

$$V_0 = (N_f - N_c)|\langle \mathcal{O}(\epsilon^2) \rangle|^2 + N_c|\tilde{m}^2|^2 + (N_f - N_c)\frac{2\epsilon^2}{\Lambda^2}m^6. \quad (2.59)$$

在这个亚稳的真空附近, 同样一圈的Coleman-Weinberg有效势会导致模场 $\hat{\Phi}$ 的修正. 仔细求出每一个的质量项, 代入公式:

$$V_{1-loop} = \frac{1}{64\pi^2} \text{Tr} \left[ \mathcal{M}_B^4 \ln \frac{\mathcal{M}_B^2}{\Lambda^2} - \mathcal{M}_F^4 \ln \frac{\mathcal{M}_F^2}{\Lambda^2} \right] \quad (2.60)$$

我们知道在亚稳的真空中 $\hat{\Phi}$ 场有非零的真空期望值<sup>6</sup>, 从图(2.3)中我们可以更容易看清这点.

### 2.3 规范传导模型的问题

上一节我们分析了ISS模型三个变形之后理论的亚稳真空及超对称真空, 这一节我们将接着讨论它们的唯象方面的应用. 在 $SU(N_c)$ 的SQCD破缺了超对称之后, 下一个问题是在可见区的粒子如何感知到这个超对称破缺. 最古老的方案之一, 也许是最优美的方案, 是在一个类QCD的强相互作用理论动力学破缺了超对称—正如ISS模型所做的, 而且标准模型的规范群可以嵌入到强相互作用理论中的味道对称群中[42, 43], 因此标准模型中的规范粒子可以通过一圈图直接感受到超对称破缺[44, 45, 46, 47, 48, 49]. 然而因为这个想法在实际建模型中的困难被丢弃了很长一段时间<sup>7</sup>. 首先, 通过Witten指标表明超对称的QCD总是

<sup>6</sup>根据Nelsen-Seiberg定理, 模场获得真空期望值, 即R对称性自发破缺的充要条件. 因此

<sup>7</sup>因此Dine等人在[50, 51]额外引入了信使场来传导破缺的超对称, 它们的信使场与超对称破缺无关, 我们一般称之为间接的规范传导模型.

有超对称真空, 因此强迫我们必须考虑复杂的手征规范理论. 其次, 这个想法通常导致标准模型的规范耦合的Landau极点问题—耦合常数在大统一能标之前胀大使得微扰论失效. 当我们把标准模型的规范群嵌入到动力学区域中场的味道对称性中, 导致有许多粒子有标准模型规范相互作用, 这些场对标准模型的 $\beta$ 函数有额外的贡献, 使得它们可能增大得过快. 第三, 即使标准模型中的规范粒子直接与超对称破缺的粒子耦合, 经常我们发现gaugino粒子的质量在主要阶水平上的贡献相消, 导致与squark, slepton粒子质量有较大的差别.

ISS模型的提出, 简单的回答了上面的第一个问题. 而且其中存在的整体对称性 $SU(N_f) \times SU(N_f) \times U(1)_B \times U(1)_R$ 提供了足够大的味道对称性, 使得标准模型的规范对称性可以嵌入到里边. 然而一般的正如intriligator等人在[21]指出的简单的把标准模型规范群嵌入到 $SU(N_f)$ 中将明显导致Landau极点问题. 我们将会看到, 上一节中对ISS模型的三种形变机制中都可以改善Landau极点问题, 而且也存在一定的参数空间可以得到合适的gaugino质量. 在本节中我们将只涉及 $Z\tilde{Z}$ 和 $\Phi^2$ 形变的讨论,  $\tilde{q}q$ 形变只给出结果.

### 2.3.1 gaugino的质量

#### • $\tilde{Z}Z$ 项形变的结果

我们首先看看Kitano等人的 $\tilde{Z}Z$ 形变的结果. 在[37]中, 他们假设 $m_1 = \dots = m_{N_f - N_c} = m$ 和 $m_{N_f - N_c + 1} = \dots = m_{N_f} = m'$ , 因此ISS模型中的整体对称性破缺到 $SU(N_f - N_c) \times SU(N_c) \times U(1)_B$ . 假如 $N_f - N_c > 5$ 或者 $N_c > 5$ , 则我们可以把标准模型的 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 嵌入到 $SU(N_f - N_c)$ 或者 $SU(N_c)$ 中去. 当嵌入到 $SU(N_f - N_c)$ 中时, 低能的标准模型规范群是味道群 $SU(N_f - N_c)$ 和磁理论中规范群的子群 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 的对角.

在ISS模型中, R对称性的存在禁止了gaugino质量的产生, 即使它与超对称破缺的粒子之间有直接的耦合. 一般的在规范传导的超对称破缺模型中, gaugino的质量有:

$$m_\lambda = \frac{g^2 \bar{N}}{(4\pi)^2} F_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \log \det \mathcal{M} \quad (2.61)$$

其中,  $\bar{N}$ 是一个常数, 取决于我们把标准模型嵌入到哪个对称群.  $\mathcal{M}$ 是信使场的质量矩阵. 在[37]中, 包含信使场的超势项有:

$$W = h\rho\hat{\Phi}\tilde{\rho} + h\bar{m}(\rho\tilde{Z} + \tilde{\rho}Z), \quad (2.62)$$

写成矩阵形式, 超势项:

$$W = h(\rho, Z)\mathcal{M} \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{Z} \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

其中,

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \hat{\Phi} & \bar{m} \\ \bar{m} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

从上面的推导容易看出, 如果像在ISS模型中一样 $\langle \hat{\Phi} \rangle$ , gaugino质量显然为0. 然而尽管 $\langle \hat{\Phi} \rangle$ 不为0, 如果 $Z, \tilde{Z}$ 场没有耦合项, 则信使场质量矩阵的行列式仍然为0, gaugino质量在一圈时还是为0. 这个就是Kitano等人在ISS模型中加入 $m_z \tilde{Z} Z$ 项的最初动机.

考虑到形变项 $m_z \tilde{Z} Z$ , 信使场的质量矩阵有:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \hat{\Phi} & \bar{m} \\ \bar{m} & m_z \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

代入方程(2.61), 得到gaugino质量有:

$$m_\lambda = \frac{g^2 \bar{N}}{(4\pi)^2} \frac{h \bar{\mu}^2}{\bar{m}} \frac{m_z}{\bar{m}} + O\left(\frac{m_z^2}{\bar{m}^2}\right), \quad (2.66)$$

其中 $g$ 是标准模型规范相互作用的耦合常数.

### • $\Phi^2$ 项形变的结果

首先类似于Kitano等人在[37]中的操作,  $\Phi$ 场的质量分成两部分, 我们得到在 $\Phi^2$ 形变的情况下, 超势项[52]:

$$W = h \text{Tr}(q\tilde{q}\Phi) - h m_1^2 \text{Tr}Y - h m_2^2 \text{Tr}\hat{\Phi} + \frac{1}{2} h^2 \mu_1 \text{Tr}Y^2 + \frac{1}{2} h^2 \mu_2 \text{Tr}\hat{\Phi}^2 + h^2 \mu_3 \text{Tr}Z\tilde{Z} \quad (2.67)$$

其中,

$$\Phi = \begin{pmatrix} Y & Z \\ \tilde{Z} & \hat{\Phi} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} \chi \\ \rho \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

$Y$ 是 $N \times N$ 的矩阵,  $\hat{\Phi}$ 是 $(N_f - N) \times (N_f - N)$ 的矩阵.  $m_1, m_2, \mu_1, \mu_2$ 以及 $\mu_3$ 都是能量标度. 如果 $m_1 = m_2, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_\phi$ , 我们就退回到一般的 $\Phi^2$ 形变[38]. 此时超势的味道对称性为 $SU(N) \times SU(N_f - N)$ . 考虑到 $N_c < N_f < \frac{3}{2}N_c$ , 一般的我们可以假设 $N \geq N_f - N_c$ . 这个超势有类似于[38]的真空结构, 但更符合唯象的要求.

选择 $\langle \rho \bar{\rho} \rangle = 0$ , 此时得到超对称真空:

$$\hat{\Phi} = \frac{m_2^2}{h\mu_2} I_{N_f - N}, \quad Z = \tilde{Z} = 0, \quad \chi\tilde{\chi} = (m_1^2 I_k, 0), \quad Y = (0, \frac{m_1^2}{h\mu_1} I_{N-k}). \quad (2.69)$$

其中 $k = 1 \dots N$ , 一般的考虑到秩条件我们让 $k \equiv N_f - N_c$ . 考虑到一圈修正, 类似于[38]中的结果, 我们得到亚稳真空的构造与(2.69)唯一不同的地方是:

$$Y \simeq (0, \frac{\mu_1}{bh} I_n, \frac{m_1^2}{h\mu_1} I_{N-k-n}) \quad (2.70)$$

亚稳的真空能:

$$V \simeq n |hm_1^2|^2. \quad (2.71)$$

这里 $n$ 是指我们从 $Y$ 矩阵中选取的属于 $\hat{Y}$ 的子矩阵的行数. 假如我们选择最简单的整体对称破缺情况讨论, 即设 $n = N - k = N_f - N_c$ , 则在亚稳真空(2.69)和(2.70)中我们的味道对称性有:

$$SU(N - N_f + N_c) \times SU(N_f - N). \quad (2.72)$$

我们可以把标准模型的规范群嵌入到这两个味道群中去. 实际上我们发现嵌入到后者将导致无法挽回的Landau极点问题, 所以我们在接下来的讨论gaugino质量的时候, 假设我们只把标准模型嵌入到 $SU(N - N_f + N_c)$ . 此时信使场是 $\hat{\chi}, Y_M, \tilde{Y}_M, Z, \tilde{Z}$ . 这里我们假设把 $Y$ 和 $\chi$ 分解成:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{IJ} & Y_M \\ \tilde{Y}_M & \hat{Y} \end{pmatrix}, \quad \chi = (\chi_{IJ}, \hat{\chi})^T. \quad (2.73)$$

其中 $I, J = 1 \dots N_f - N_c$ . 因此有:

$$\text{Tr} \chi \tilde{\chi} Y = \chi_{IJ} \tilde{\chi}_{IK} Y_{JK} + \text{Tr} (\chi_{IJ} \tilde{Y}_M \hat{\chi} + \hat{\chi} \tilde{\chi}_{IJ} \tilde{Y}_M + \hat{\chi} \tilde{\chi} \hat{Y}) \quad (2.74)$$

涉及到信使场的超势项可以写成:

$$W \supset (\hat{\chi}, Y_M, Z) \mathcal{M} \begin{pmatrix} \tilde{\chi} \\ \tilde{Y}_M \\ \tilde{Z} \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

其中信使场的质量矩阵有:

$$\mathcal{M}/h = \begin{pmatrix} h\hat{Y} & \tilde{\chi}_{IJ} & 0 \\ \chi_{IJ} & h\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & h\mu_3 \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

代入一般的gaugino质量公式(2.61)得到:

$$m_\lambda = \frac{g^2 \bar{N}}{(4\pi)^2} F_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \log \det \mathcal{M} \simeq \begin{cases} \frac{g^2 \bar{N}}{(4\pi)^2} h^2 b m_1^2 / \mu_1 & \text{if } m_1^2 < \frac{\mu_1^2}{b} \\ \frac{g^2 \bar{N}}{(4\pi)^2} h^2 \mu_1 & \text{if } m_1^2 > \frac{\mu_1^2}{b} \end{cases} \quad (2.77)$$

如此的gaugino质量总是可以满足唯象的要求, 只要我们适当的调节其中的参数.

### 2.3.2 Landau极点问题

#### • $\tilde{Z}Z$ 项形变的结果

在计算规范耦合常数的跑动时, 我们需要知道理论中的质量谱. 在[37]中, 超势项有:

$$W = h \text{Tr} \left[ \bar{m}^2 Y + \bar{\mu}^2 \hat{\Phi} - \chi Y \tilde{\chi} - \chi Z \tilde{\rho} - \rho \tilde{Z} \tilde{\chi} - \rho \hat{\Phi} \tilde{\rho} - m_z Z \tilde{Z} \right]. \quad (2.78)$$

考虑到方程(2.33)和(2.34), 我们可以从上面超势项读出模型的谱来(不考虑由整体对称性破缺产生的粒子谱, 因为它们对 $\beta$ 函数没有贡献):  $Y, Z, \tilde{Z}, \rho, \tilde{\rho}, \chi, \tilde{\chi}$ 场都有质量 $O(h\bar{m})$ . 模场 $\hat{\Phi}$ 的质量来自于一圈有效势, 大约为圈图因子乘上 $V^{1/4}$ , 从gaugino质量公式(2.66)看出两者相当, 也就是说有 $O(100 \text{ GeV})$ .

考虑把 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 嵌入到 $SU(N_f - N_c)$ , 在这种情况下, 模场 $\hat{\Phi}$ 是标准模型的单态, 对其耦合常数的 $\beta$ 函数没有贡献. 我们考虑最大的耦合常数的 $b_3$ :

$$\begin{aligned} b_3(\mu_R < h\bar{m}) &= 3, & b_3(h\bar{m} < \mu_R < \Lambda) &= 3 - 2N_f + N_c, \\ b_3(\mu_R > \Lambda) &= 3 - N_c, \end{aligned} \quad (2.79)$$

其中 $\mu_R$ 是重整化的能标. 其中在 $\mu_R > \Lambda$ 时, 我们利用了电理论中场对 $b_3$ 的贡献, 而 $\mu_R < h\bar{m}$ 时的3来自于最小超对称标准模型场内容的贡献.  $b_3$ 的约定来自于方程:

$$\mu_R \frac{dg_3}{d\mu_R} = \frac{-b_3}{16\pi^2} g_3^3 \equiv \beta_3. \quad (2.80)$$

为了使得嵌入可行, 要求  $N_f - N_c \geq 5$ . 考虑到  $N_c + 1 \leq N_f < 3N_c/2$ , 可以得到:

$$2N_f - N_c > 20, \quad N_c > 10. \quad (2.81)$$

这些限制导致了非常大的 $\beta$ 函数的贡献. 为了在大统一能标( $M_{GUT} \sim 10^{16} GeV$ )之前避免Landau极点问题, 我们从上面的 $b_3$ 值得到对额外能标 $h\bar{m}$ 和 $\Lambda$ (电理论的截断能标)的限制:

$$h\bar{m} \gtrsim 10^{13} GeV, \quad \Lambda \sim M_{GUT}. \quad (2.82)$$

接着考虑把 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 嵌入到 $SU(N_c)$ , 类似的 $b_3$ 的贡献有:

$$\begin{aligned} b_3(\mu_R < h\bar{m}) &= 3 - N_c, & b_3(h\bar{m} < \mu_R < \Lambda) &= 3 - 2N_f + N_c, \\ b_3(\mu_R > \Lambda) &= 3 - N_c. \end{aligned} \quad (2.83)$$

要求嵌入 $SU(N_c)$ , 则有  $N_c > 5$ . 再考虑  $N_c + 1 \leq N_f < 3N_c/2$ , 则有  $2N_f - N_c > 5$ . 代入 $g_3$ 的重整化群, 我们发现这种嵌入总是会导致Landau极点问题. 归根到底此时因为模场 $\hat{\Phi}$ 对 $b_3$ 有贡献, 导致在低能时 $b_3$ 太小.

### • $\Phi^2$ 项形变的结果

我们可以从方程(2.67)读出相应粒子的质量.  $\rho, \chi, Y, Z, \tilde{Z}$ 场的质量为 $O(hm_1)$ , 而场 $\hat{\Phi}$ 的质量为 $O(h\mu_2)$ .

考虑把 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 嵌入到 $SU(N - N_f + N_c)$ , 此时 $b_3$ 有:

$$b_3(\mu_R < hm_1) = 3, \quad b_3(hm_1 < \mu_R < \Lambda) = 3 - 2N_f + N_c, \quad b_3(\mu_R > \Lambda) = 3 - N_c, \quad (2.84)$$

巧合的, 这个 $b_3$ 跟Kitano等人把 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 嵌入到 $SU(N_f - N_c)$ 时的相等. 当然, 来自于每一个信使场的贡献是不一样的. 在这种情况下信使场为 $\hat{\chi}, Y_M$  and  $Z$ , 各自对 $b_3$ 的贡献是: $N_f - N_c, N_f - N_c, N_f - N$ . 此外, 一部分 $Y$ 属于 $SU(3)$ 的伴随表示, 它贡献 $N - N_f + N_c$ . 因此在 $hm_1 < \mu_R < \Lambda$ 时,  $b_3 = -3 + 2N_f - N_c$ . 尽管两者的 $b_3$ 相等, 但对 $b_3$ 中的 $N_f$ 或者 $N_c$ 的限制不一样, 因为它们所嵌入到群都不一样. 这里我们要求 $N - N_f + N_c \geq 5$ , 因此让 $N_c = 6$ 和 $N = 6$ 是最合适的选择. 显然这里要求的 $N_c$ 比[37]中的要求低很多, 更容易存在避免Landau极点问题的解. 这里让我们仔细看一下怎么避免Landau极点问题. 我们可以选择参数如下:

$$M_{GUT} = 10^{16} GeV, \quad M_z \simeq 90 GeV, \quad M_s \simeq 10^3 GeV, \quad \frac{g_3^2(M_z)}{4\pi} \sim 0.18. \quad (2.85)$$

其中 $M_s$ 表示最小超对称标准模型中粒子的质量.  $SU(3)$ 的耦合有:

$$\alpha_3^{-1}(M_{GUT}) \simeq 5.6 - \frac{7}{2\pi} \log M_z + \frac{4}{2\pi} \log M_s - \frac{N_c - 2N_f}{2\pi} \log hm_1 - \frac{2N_f - 2N_c}{2\pi} \log \Lambda - \frac{-3 + N_c}{2\pi} \log M_{GUT}, \quad (2.86)$$

容易解得假如 $hm_1 \sim 10^7$  GeV, 而且 $\Lambda \sim 10^9$  GeV或者更小(但是大于 $hm_1$ ), 在大统一能标之下, Landau极点问题可以避免, 也就是说 $\alpha_3^{-1}(M_{GUT}) > 1$ .

也许在这个模型中, 更有趣的解是考虑(2.67)中 $\chi, Y$ 场的作用完全类似于 $\rho, \hat{\Phi}$ . 因此我们可以让 $\rho\tilde{\rho}$ 获得跟 $\chi\tilde{\chi}$ 一样的真空期望值 $m_2^2$ . 此时 $Z$ 和 $\chi$ 场的质量变成 $m_2$ , 假如我们有 $m_2 \gg hm_1$ , 则 $\beta$ 函数也相应的变成

$$\begin{aligned} b_3(\mu_R < hm_1) &= 3, \quad b_3(hm_1 < \mu_R < hm_2) = 3 - N, \\ b_3(hm_2 < \mu_R < \Lambda) &= 3 - 2N_f + N_c, \quad b_3(\mu_R > \Lambda) = 3 - N_c, \end{aligned} \quad (2.87)$$

进一步假设 $m_2 \sim \Lambda$ , 我们发现此时Landau极点问题几乎没有对 $\Lambda$ 的限制, 只要我们有 $hm_1 \sim 10^7$  GeV, 则不会有Landau极点问题.



## 第三章 暴涨宇宙学

### 3.1 大爆炸宇宙学

#### 3.1.1 标准宇宙学模型简介

宇宙学原理声称, 我们的宇宙在大尺度上平均来看必须是均匀的, 且各向同性的. 基于这个原理, 在标准大爆炸宇宙学模型中, 我们可以用FRW度规来描述它:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (3.1)$$

其中 $a$ 是宇宙的尺度因子,  $t$ 是宇宙学时间, 常数 $k$ 是空间曲率.  $k$ 大于零对应的宇宙是闭的,  $k$ 小于零对应的宇宙是开的,  $k$ 等于零对应的宇宙是平坦的.

宇宙学的动力学演变可以用广义相对论来描述, 也就是说取决于爱因斯坦方程

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

其中 $R_{\mu\nu}$ ,  $R$ ,  $T_{\mu\nu}$ 和 $G$ 分别是Ricci张量, Ricci标量, 能动量张量和引力常数.  $\Lambda$ 是宇宙学常数, 由于我们下面不涉及到暗能量问题, 我们都令 $\Lambda$ 为零.

从上面的爱因斯坦方程, 结合FRW度规, 我们可以得到场方程:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (3.4)$$

其中一点表示对时间求导.  $H \equiv \dot{a}/a$ 是宇宙的Hubble膨胀速率.  $\rho$ 表示宇宙的能量密度.  $P$ 表示宇宙中压强. 第一个方程我们一般称为Friedmann方程, 第二个称为加速方程. 组合这些关系我们得到另一个常用的方程—连续性方程:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (3.5)$$

我们也可以把Friedmann方程改写为

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (3.6)$$

其中

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \rho_c \equiv \frac{3H^2 M_p^2}{8\pi} \quad (3.7)$$

考虑到物态方程, 对于辐射而言,  $P = \rho/3$ . 对于星尘等物质而言,  $P = 0$ . 再假设空间由平坦几何来描述, 即  $k = 0$ ;  $\Omega = 1$ , 可以解出Friedmann方程和连续性方程, 从而得到宇宙中的能量密度, 宇宙学尺度因子和时间三者之间的演变关系如下:

$$a \propto t^{1/2}, \quad \rho \propto a^{-4}, \quad \text{辐射占主导时;} \quad (3.8)$$

$$a \propto t^{2/3}, \quad \rho \propto a^{-3}, \quad \text{物质占主导时.} \quad (3.9)$$

在这两种最简单的情况下, 从加速方程可以看出, 此时的宇宙处于加速度减少的膨胀阶段(当然这与我们令  $\Lambda = 0$  有关). 综上所述, 我们就对标准宇宙学的动力学演变情况有了个大概介绍<sup>1</sup>.

### 3.1.2 困难及其解决

这一小节我们将简单罗列一下标准宇宙学模型中的一些困惑. 这些问题在每一本现代宇宙学的书中都可以找到. 如[53, 54, 55]. 这些问题并不是说标准大爆炸宇宙学模型上的逻辑不自洽, 而仅仅是些审美问题. 或者说, 根据宇宙学标准模型要得到现在的宇宙, 必须假设在大爆炸时一些非常非常特殊的初始值, 而暴涨模型则可以完美的解决这些审美问题, 非常经济, 而且非常容易<sup>2</sup>. 所以我们在这一小节顺带介绍暴涨解决标准大爆炸宇宙学的方法.

#### 1, 平坦性问题.

在标准大爆炸宇宙学中, 没有真空能占主导的时候. 从辐射能和物质占主导的时候的方程(3.8)可以看出, 总是有  $\ddot{a} < 0$ . 也就是说  $a^2 H^2$  总是减少的. 再考虑到方程(3.6), 可以发现  $\Omega$  总是随着宇宙的膨胀在增大.

具体的, 在辐射能占主导的时候,

$$\Omega - 1 \propto \frac{1}{a^2 a^{-4}} \propto a^2. \quad (3.10)$$

<sup>1</sup>尽管下面会涉及一些膨胀宇宙学的热力学, 高温相变等, 我们这里并不做详细介绍.

<sup>2</sup>虽然暴涨的机制很容易解决标准宇宙学模型的一些问题, 但是也可以这么说, 至今为止还没有一个令人信服的暴涨模型, 因为模型中的参数往往还是需要精细调节.

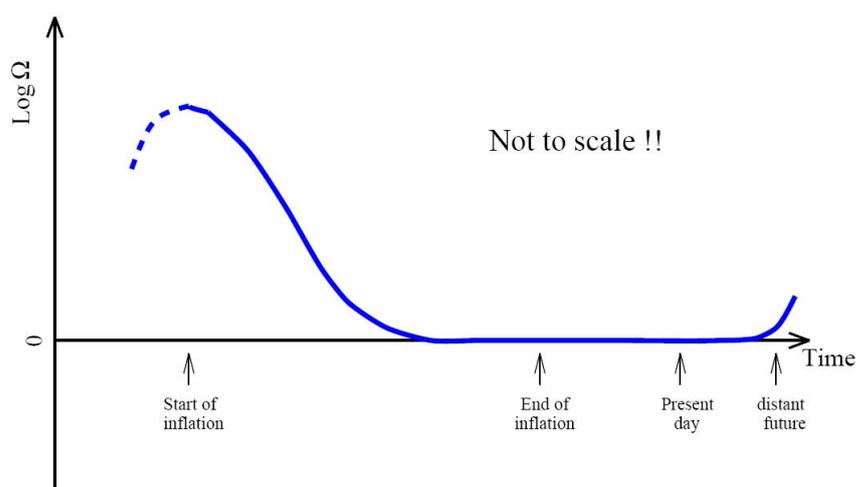


图 3.1: 在暴涨开始以前的阶段用虚线表示, 暴涨期间 $\Omega$ 演化至1, 并延续到现在. 也许在遥远的将来会偏离现在的结果.

在物质占主导时,

$$\Omega - 1 \propto \frac{1}{a^2 a^{-3}} \propto a. \quad (3.11)$$

在两种情况下,  $\Omega - 1$ 随着时间往回推总是减少的. 因为辐射能在宇宙总能量中占主导是,  $\Omega - 1$ 变化显著一点, 用它的变换关系我们可以推算出宇宙早期相对于现如今的 $\Omega - 1$ 比值. 再结合我们现在的实现观测表明 $\Omega - 1 \sim 0$ . 于是我们得到, 在宇宙早期有Planck能标的温度时,  $\Omega - 1 < 10^{-64}$ , 在宇宙核合成时期,  $\Omega - 1 < 10^{-16}$ . 这么小的数要求我们精细的调节在早期宇宙的初始条件.

暴涨宇宙学模型, 可以很容易解决这个问题. 因为暴涨过程中 $H$ 近似不变, 此时同样考虑到方程(3.6), 得到:

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{a^2 H^2} \sim \frac{1}{a^2}. \quad (3.12)$$

于是暴涨过程中 $\Omega$ 的变化, 与上面所说的辐射或物质能占主导是刚好相反. 也可以弥补它们造成的困难. 考虑到暴涨时期之后, 有一个典型的图(3.1)描述 $\Omega$ 与时间的关系.

## 2, 视界问题.

一般来说, 我们可以用光子在最后散射表面(surface of last scattering)时刻的值来评估视界问题. 结果发现, 在标准大爆炸宇宙学模型中, 在最后散射时刻有因果联系着的区域在现在天区所张的区域大约为 $1^\circ$ . 然而现代宇宙学中观测到的微波背景(CMB)表明在整个天区有相同的温度 $2.726 \pm 0.01K$ . CMB的结果明显与标准宇宙学模型中计算的不一致, 这就是视界问题.

具体的考虑在最后散射时刻, 对应于与我们目前Hubble长度(也就是说目前有因果联系的区域)的长度 $\lambda_H(t_{LS})$ 有:

$$\lambda_H(t_{LS}) = \lambda_H(t_0) \left( \frac{a_{LS}}{a_0} \right), \quad (3.13)$$

其中 $t_{LS}$ 表示最后散射时的时间,  $t_0$ 表示目前的时间. 另一面因为在最后散射时刻, 宇宙能量有物质的能量占主导, 于是有 $H^{-1} \propto \rho_M^{-1/3} \propto a^{-1}$ . 最后我们得到:

$$\frac{H_{LS}^{-3}}{\lambda_H^3(t_{LS})} = \left( \frac{a_{LS}}{a_0} \right)^3 / 2 = \frac{t_{LS}}{t_0} \approx 10^{-6}. \quad (3.14)$$

也就是说在最后散射时刻有因果联系的区域 $H_{LS}^{-1}$ 所张成的区域的个数需要有一百万个, 而且其中光子达到热平衡的温度一样, 如此的体系就可以用标准宇宙学模型的动力学演变模式进化到现在.

暴涨模型也同样可以很容易解决视界问题. 因为上面对问题归根到底是因为在宇宙学早期区域太小了. 暴涨可以使这个很小的区域突然变大. 由于暴涨期间有 $a \sim t^{1/\epsilon}$ , 其中 $\epsilon \ll 1$ , 物理波长 $\lambda \propto a$ 增长得比Hubble长度( $H^{-1} \propto t$ )快得多. 于是在宇宙甚早期物理波长在暴涨期间被拉伸了, 直到视界之外. 详细的计算表明只要宇宙在暴涨期间增长了 $e^{70}$ 倍就可以解决视界问题. 在暴涨结束之后这些物理波长又重新进入视界, 如图(3.2)所示.

### 3, 熵问题.

假设宇宙经历绝热的膨胀<sup>3</sup>, 则熵问题可以简单的跟平坦性问题联系在一起. 在辐射能占主导时, 我们有

$$\Omega - 1 = \frac{kM_p^2}{a^2 T^4} = \frac{kM_p^2}{S^{2/3} T^2}. \quad (3.15)$$

<sup>3</sup>正如标准大爆炸宇宙学模型中的一样, 因为视界 $H^{-1}$ 在辐射占主导的时候正比于 $a^2$ ; 在物质占主导的时候正比于 $a^{3/2}$ , 所以其中的物理波长 $\lambda \sim a$ , 增长永远比视界的尺度 $H^{-1}$ 小.

如此我们可以计算出, 宇宙在能标为Planck能标时的 $\Omega - 1$ 为:

$$|\Omega - 1|_{t=t_p} = \frac{1}{S_p^{2/3}} \sim 10^{-64}. \quad (3.16)$$

其中我们用 $t_p$ ,  $S_p$ 表示宇宙在Planck能标时的时间和熵. 最后一个约等号后面的数字利用了前面讲平坦性问题时的结果, 是由现在观测到的 $\Omega - 1$ 反推回去得到的. 于是为了与现在的观测相符, 从方程(3.16)我们要求宇宙在甚早期有一个非常庞大的熵 $S \sim 10^{90}$ .

同样, 暴涨也可以解决熵问题. 关键在于暴涨的过程使得宇宙经历过一个短暂的非绝热过程, 这与上面一开始我们假设的绝热的膨胀是不一致的. 假设 $S_i \sim O(1)$ 为暴涨前的熵,  $S_f$ 为暴涨之后宇宙的熵<sup>4</sup>. 因为熵 $S \sim a^3 T^3$ , 于是

$$\left(\frac{S_f}{S_i}\right)^{1/3} = \frac{T_f}{T_i} e^N. \quad (3.17)$$

我们得到假如 $N = 70 - \ln \frac{T_f}{T_i}$ , 就可以得到上面一段要求的 $10^{90}$ 的熵.

## 3.2 暴涨模型

尽管大爆炸宇宙学取得了很大的成功, 被人称为标准宇宙学. 但是正如我们在上一节说到的大爆炸宇宙学中自身无法解决的问题, 导致了Guth在1981年提出了暴涨模型[56]. 后续的对暴涨模型的完善[57, 58], 及暴涨模型中扰动的计算发现[59, 60, 61, 62, 63], 暴涨模型可以有非常重要的预测, 即它为早期宇宙中的结构形成提供了自然的初始条件, 提供了宇宙中的原初扰动. 大量的实验观测很好的符合了暴涨宇宙学模型的预测. 这一部分我们将先简单介绍一下暴涨引起的扰动, 其次再介绍一个对暴涨模型的要求—慢滚近似<sup>5</sup>, 最后是两个经典的暴涨模型, 混沌暴涨模型[65]和杂化暴涨模型[67].

在牛顿力学体系里面, 我们就可以计算一个自引力粒子系统的稳定性的问题, 并且发现微小的不均匀性是不稳定的, 它们的演变遵循牛顿方程:

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}} + 2H\dot{\delta}_{\vec{k}} + \left(v_s^2 \frac{k^2}{a^2} - 2M_p^2 \rho_M\right) \delta_{\vec{k}} = 0, \quad (3.18)$$

<sup>4</sup>这里假设暴涨结束之后相变马上发生, 即暴涨时期的能量马上转变为之后的温度, 宇宙由辐射能占主导.

<sup>5</sup>暴涨的自洽性并不要求慢滚, 如Linde在2001年构建的快滚暴涨模型[64]. 正是因为暴涨对宇宙学扰动的预测使得我们相信, 与我们目前观测相关的暴涨应该是慢滚的.

其中  $v_s^2 = \partial p / \partial \rho_M$  是声速的平方,  $\delta_{\vec{k}}$  是物质扰动的平面波分解:

$$\frac{\rho_M(\vec{x}, t)}{\rho_M} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \delta_{\vec{k}}(t) e^{-i\vec{k}\vec{x}}. \quad (3.19)$$

根据上面的方程, 考虑一个扰动波长  $k < k_J^2 = 2M_p^2 a^2 \rho_M / v_s^2$ , 在宇宙以辐射为主时期, 即  $H^2 = \rho_r / (3M_p^2)$ ,  $a \sim t^{1/2}$ , 其中  $\rho_r$  表示辐射的能量密度. 这时物质扰动只是按照  $\ln a$  增长, 远小于尺度因子  $a$  的增长. 但是在物质为主时期, 即  $H^2 = \rho_M / (3M_p^2)$ ,  $a \sim t^{2/3}$  时, 这时扰动按照幂律增长,  $\delta_{\vec{k}} \sim t^{2/3}$ , 与尺度因子同样的速率增长. 所以物质扰动只有到了物质为主时期才有明显增长.

上面的计算假设了一个前提, 就是宇宙必须预先就存在微小的扰动, 并且这些扰动在辐射为主或者物质为主的时期进入视界. 在热大爆炸宇宙学中这些微小扰动的物理起源. 暴胀模型为其提供了一个自然的初始条件, 也就是宇宙处在暴胀时期的量子涨落.

把宇宙描写成一个完美的均匀的, 各向同性的FRW模型显然是一个理想化的处理. 实际上我们更感兴趣的应该是对均匀的各向同性的偏离, 因为其提供了更为有用的预测, 使我们能够区别各种各样的模型. 我们将考虑场的小的扰动

$$\phi = \phi_0(t) + \delta\phi(t, x), \quad (3.20)$$

而且我们只保留到  $\delta\phi$  的一阶项, 显然一阶项不应该是各向同性的, 也就是说应该与  $x$  有关.

对于一非均匀的物质分布, 爱因斯坦方程暗示我们也必须考虑对空间平坦的FRW度规的扰动. 只考虑扰动度规的标量扰动<sup>6</sup>, 最一般的扰动的度规为

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -1 - 2A & \partial_i B \\ \partial_i B & (1 - 2\psi) \delta_{ij} + D_{ij} E \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

扰动的FRW时空可以用如下的线元(line element)表示

$$ds^2 = a^2 ((-1 - 2A) d\tau^2 + 2 \partial_i B d\tau dx^i + ((1 - 2\psi) \delta_{ij} + D_{ij} E) dx^i dx^j). \quad (3.22)$$

<sup>6</sup>首先, 在线性近似下, 标量扰动, 张量扰动和矢量扰动各自独立的演变. 计算标量扰动并需要关心后两者. 再是矢量扰动, 因为其来源于转动的速度场, 在暴胀时期这种场并未出现, 所以计算暴胀引起的扰动预测时不用考虑. 最后由于本文下面并不涉及张量扰动模式, 在这个简介中跳过张量扰动, 而只介绍最简单的标量扰动.

其中  $D_{ij} = (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2)$ ,  $\tau$  是共形时间.  $A, B, D, E$  是标量, 表征度规在各分量扰动的量. 共形时间的计算由下面公式可得:

$$\tau = \int \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.23)$$

接着我们考虑这些标量在时空变换

$$\widetilde{x}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad (3.24)$$

下的性质, 其中  $x$  上面的一弯表示变换之后的变量. 指标  $\mu$  可以取 0 至 3. 用 0 表示时间分量, 用  $i$  (从 1 至 3) 表示空间分量, 分解  $\delta x$  有:

$$\begin{aligned} \delta x^0 &= \xi^0(x^\mu); \\ \delta x^i &= \partial^i \beta(x^\mu) + v^i(x^\mu); \quad \partial_i v^i = 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

在这个变换下, 度规中的标量扰动有(要求有  $ds^2 = \widetilde{ds}^2$ ):

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= A - \xi^{0'} - \frac{a'}{a} \xi^0; \\ \widetilde{B} &= B + \xi^0 + \beta' \\ \widetilde{\psi} &= \psi - \frac{1}{3} \nabla^2 \beta + \frac{a'}{a} \xi^0; \\ \widetilde{E} &= E + 2\beta. \end{aligned}$$

从上面的变换结果, 我们发现尽管  $B$  和  $E$  各自的变换都跟空间分量有关, 但是简单的组合  $(E'/2 - B)$  显然只与共形时间的变化相关. 实际上我们可以组合各个标量, 得到两个著名的规范变换不变量或者叫巴顶(Bardeen)势, 如下:

$$\Phi = -A + \frac{1}{a} \left[ \left( -B + \frac{E'}{2} \right) a \right]', \quad (3.26)$$

$$\Psi = -\psi - \frac{1}{6} \nabla^2 E + \frac{a'}{a} \left( B - \frac{E'}{2} \right). \quad (3.27)$$

为了计算曲率扰动, 重要的是构建涉及度规分量中  $\psi$  标量的规范不变量. 因为对于一平坦的宇宙来说, 共形时间  $\tau$  恒定的超面上的内禀空间曲率有:

$${}^{(3)}R = \frac{4}{a^2} \nabla^2 \psi. \quad (3.28)$$

标量 $\psi$ 一般叫做曲率扰动. 从上面的变换关系看出, 显然仅仅 $\psi$ 不是规范不变的, 需要加入额外项. 一般我们常用的有两种. 在能量密度不变的超曲面上的曲率扰动有:

$$\zeta \equiv \psi + \frac{H}{\dot{\rho}} \delta\rho. \quad (3.29)$$

而共动的曲率扰动(严格的讲, 在正交与共动世界线的超曲面上的曲率扰动)有如下形式:

$$\mathcal{R} \equiv \psi - \frac{H}{\rho + P} \delta q. \quad (3.30)$$

其中的 $\rho$ ,  $P$ 是物质扰动中的物理量, 来自于能动量张量. 考虑到扰动 $\delta T_\nu^\mu$ , 一般的能动量张量我们写成:

$$T_\nu^\mu = \begin{bmatrix} -(\rho + \delta P) & q_j \\ -q^i + (\rho + P)B^i & (P + \delta P)\delta_j^i + \pi_j^i \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

其中,  $B^i = \partial_i B + \bar{B}^i$ , 且 $\partial_i \bar{B}^i = 0$ . 相似的 $q^i = \partial_i q + \bar{q}_i$ , 且 $\partial_i \bar{q}^i = 0$ .  $\pi_j^i$ 是各向异性的能动量张量.

方程(3.29)和(3.30)中的曲率扰动还有一些实用的变体. 假如我们考虑到是一般的单场暴涨模型, 我们有<sup>7</sup> $\delta q = -\phi' \delta\phi$ , 则共动曲率扰动有:

$$\mathcal{R} \equiv \psi + \frac{H}{\dot{\phi}} \delta\phi. \quad (3.32)$$

在慢滚近似下, 也就是 $\rho$ 可以用 $V(\phi)$ 表征, 于是有 $\frac{\delta\rho}{\dot{\rho}} = \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}}$ . 代入方程(3.32), 得到 $\mathcal{R} = \zeta$ .

考虑扰动的爱因斯坦方程 $\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu}$ , 我们就可以计算曲率扰动 $\psi$ 的演变了. 一般为了计算方便, 我们经常涉及到纵向规范(longitudinal gauge). 纵向规范对应于做一个特别的规范变换<sup>8</sup>使得 $B = E = 0$ . 首先仔细计算扰动的爱因斯坦方程 $ij$ 分量可得两个Bardeen势相等, 即 $\Phi = \Psi$ . 在纵向规范下, 就是 $\psi = A$ . 再考虑方程的 $0i$ 分量, 得到方程:

$$\dot{\psi} + H\psi = 4\pi G \dot{\phi} \delta\phi = \epsilon H^2 \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \quad (3.33)$$

<sup>7</sup>注意此时能动量张量表示为 $\phi$ 的函数.  $T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} (\frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \partial_\sigma \phi \partial_\lambda \phi - V(\phi))$ . 于是对 $T_i^0$ 也就是 $q_i$ 做变分, 可以得到 $q$ 与 $\phi$ 的函数关系. 马上我们将用到关系 $\delta T_0^i = \partial^i B \phi'^2 + \partial^i \delta\phi \phi'$ , 结合上面正文中的 $T_\nu^\mu$ 矩阵得到: $(\rho + P) = \phi'^2$ .

<sup>8</sup>对度规的对称性分析, 我们可以得到只有两个独立的标量扰动.

组合爱因斯坦方程的00和*ii*分量有:

$$\psi_{\mathbf{k}}'' + 2 \left( \mathcal{H} - \frac{\phi''}{\phi'} \right) \psi_{\mathbf{k}}' + 2 \left( \mathcal{H}' - \mathcal{H} \frac{\phi''}{\phi'} \right) \psi_{\mathbf{k}} + k^2 \psi_{\mathbf{k}} = 0 \quad (3.34)$$

其中 $\mathcal{H} = a'/a$ 是共形时间下的Hubble参数,  $\psi_{\mathbf{k}}$ 是曲率扰动 $\psi$ 在Fourier展开之后的 $k$ 模. 通过一些变量代换这个方程可以变换成:

$$\psi_{\mathbf{k}}'' + 2\mathcal{H}(\eta - \epsilon) \psi_{\mathbf{k}}' + 2\mathcal{H}^2(\eta - 2\epsilon) \psi_{\mathbf{k}} + k^2 \psi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (3.35)$$

其中 $\epsilon$ 和 $\eta$ 都是小于1慢滚参数, 这个我们在接下来的小节里面将马上介绍到. 关键是在超视界的尺度上( $k \gg aH$ ), 解得上面的方程我们 $\dot{\psi}_{\mathbf{k}} \sim f(\eta, \epsilon) \times H \psi_{\mathbf{k}}$ . 因为 $f(\eta, \epsilon)$ 很小, 上面的结果等价于说, 在超视界尺度上, 扰动被冻结了. 再从方程(3.33), 可以得到在超视界尺度上,  $\psi_{\mathbf{k}} \simeq \epsilon H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}}$ . 如此我得到规范不变的共动曲率扰动:

$$\mathcal{R}_{\mathbf{k}} = \psi_{\mathbf{k}} + H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} = (1 + \epsilon) H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \simeq H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}}. \quad (3.36)$$

其中 $\mathcal{R}$ 的Fourier展开有:

$$\mathcal{R} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.37)$$

曲率扰动的功率谱 $P_{\mathcal{R}}$ 定义如下:

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{p}} \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} P_{\mathcal{R}}(k) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}). \quad (3.38)$$

利用上一段的结果, 得到:

$$P_{\mathcal{R}} = \frac{k^3}{2\pi^3} \frac{H^2}{\dot{\phi}^2} |\delta\phi_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{k^3}{4M_p^2 \pi^2 \epsilon} |\phi_{\mathbf{k}}|^2. \quad (3.39)$$

其中 $\epsilon$ 取决于暴涨时候的势能形式, 很快在下一节出现. 于是唯一剩下要算的东西就是 $\delta\phi$ 了. 其中涉及到慢滚参数, 我们留待下一节具体计算.

### 3.2.1 慢滚暴涨

暴涨模型动力学的粗略分析, 可以表明慢滚模型是暴涨模型自然的一种实现<sup>9</sup>. 同时, 实验上观测到的近似标度不变的密度功率谱, 要求目前观测到的宇

<sup>9</sup>最简单的想法是, 一个完全平坦的势能, 也就是恒定的势能, 显然将导致永恒的暴涨. 想要结束暴涨最简单的是让它慢慢的跑动起来.

宙在甚早期必须经历一个慢滚暴涨. 慢滚条件的自然实现成为了构造暴涨模型的最重要评判标准. 如图(3.3)所示, 定性的表示出了暴涨开始和结束的三个不同位相:(a)势能遂穿阶段(假如必要的话, 如新暴涨模型中), (b)慢滚阶段, (c)在势能极小值的相干振动.

在这个小节中, 我们将考虑一个标量场 $\phi$ 引起的暴涨. 由FRW度规和一般的标量场经典拉氏量 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)$ , 我们得到暴涨场 $\phi$ 的运动方程为:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2\phi}{a^2} + V'(\phi) = 0, \quad (3.40)$$

其中一撇表示对 $\phi$ 场求导.  $\phi$ 场的能动量张量为:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \mathcal{L}g^{\mu\nu}, \quad (3.41)$$

从中我们可以读出 $\phi$ 场产生的能动量密度如下:

$$\rho_\phi = T_{00} = \dot{\phi}^2/2 + V(\phi) + (\nabla\phi)^2/2a^2, \quad (3.42)$$

$$p_\phi = T_{ii} = \dot{\phi}^2/2 - V(\phi) - (\nabla\phi)^2/2a^2. \quad (3.43)$$

我们注意到, 简单的推导可得引起暴涨的标量场是均匀的. 从上面能动量张量的式子出发, 如果由 $\nabla\phi$ 占主导, 则有 $p_\phi \simeq -\rho_\phi/3$ . 然而这样的能动量关系告诉我们, 此时不足以导致暴涨. 因为暴涨, 也就是宇宙快速的加速膨胀, 翻译成数学语言就是 $\ddot{a} \gg 0$ , 从方程(3.3)可以看出,  $\ddot{a} \gg 0$ 等价于 $p \ll \frac{\rho}{3}$ , 显然如此就要求在 $\phi$ 场的能动量张量中不能由 $\nabla\phi$ 占主导, 也就可以粗略的说 $\phi$ 场应该是均匀的.

同样我们可以注意到, 简单的推导可得由标量场的势能推动了暴涨的进行. 因为暴涨要求 $p \ll \rho/3$ , 结合上面 $p$ 和 $\rho$ 的公式可得:

$$p \ll \rho/3 \iff V(\phi) \gg \dot{\phi}^2. \quad (3.44)$$

也就是说标量场的势能推动了暴涨的进行, 其占据了真空能的主要部分.

从方程(3.40), 我们得到空间均匀各向同性的 $\phi$ 场的运动方程为:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (3.45)$$

其中 $H$ 为哈勃参数, 且有

$$H^2 = \frac{1}{3M_p^2}\rho_\phi = \frac{1}{3M_p^2} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right). \quad (3.46)$$

由于暴涨要求  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ , 两边对时间求导得到  $\ddot{\phi} \ll V'$ , 如此上面  $\phi$  场的运动方程中第一项可以忽略. 于是第二项  $3H\dot{\phi}$  就不应该忽略了, 否则将会导致  $V$  与  $\phi$  场无关<sup>10</sup>, 这与我们考虑标量场驱动的暴涨的初衷相违背. 最后我们有  $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$ . 综上所述我们得到了慢滚暴涨模型的两个慢滚条件:

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \Rightarrow \epsilon \equiv \frac{M_p^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1, \quad (3.47)$$

$$\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi} \Rightarrow \eta \equiv M_p^2 \left( \frac{V''}{V} \right)^2 \ll 1. \quad (3.48)$$

可以从另一个方面来分析我们上面所做到慢滚近似. 因为我们有  $H \equiv \dot{a}/a$ , 很容易知道假如有:

$$\dot{H} \rightarrow 0, \quad (3.49)$$

则有  $a \sim e^{Ht}$ , 宇宙经历一个  $e$  指数暴涨过程. 当然上面要求  $H$  不随时间变化, 这个条件太严格了, 我们也没有必要暴涨是严格的  $e$  指数暴涨. 降低要求的结果是:

$$\dot{H} \ll H^2. \quad (3.50)$$

等式中右边的  $H^2$  可以这么理解: 因为方程(3.49)提示我们, 在暴涨时  $\Delta H$  在一段时间之内要非常小, 至少相对于自己  $H$  要很小, 即  $\Delta H \ll H$ . 我们考虑在早期宇宙中有因果联系的一区域, 其大小为  $H^{-1}$ , 光可以在  $\Delta t \sim H^{-1}$  之内到达. 把这个等式应用到  $\Delta H \ll H$ , 则有  $\dot{H} \ll H^2$ . 有了方程(3.50)之后, 容易解得此时宇宙经历

$$a \sim t^{1/\epsilon} \quad (3.51)$$

的暴涨过程, 其中  $\epsilon = |\frac{\dot{H}}{H^2}| \ll 1$ . 简单的计算表明这个  $\epsilon$  就是方程(3.47)中定义的  $\epsilon$ , 都是慢滚参数.

知道了慢滚参数的处理, 最后我们可以接着上一节的计算. 功率谱的最终结果可以用慢滚参数来表示<sup>11</sup>, 因为从方程(3.39)得知功率谱  $P_{\mathcal{R}}$  取决于  $\delta|\phi_{\mathbf{k}}|^2$ , 而后的演变显然与暴涨时的势能息息相关, 从而可以用特征暴涨势能的慢滚参数来表示.

在纵向规范中, 标量场  $\delta\phi$  满足的扰动的 Klein-Gordon 方程可以写成:

$$\delta\ddot{\phi}_{\mathbf{k}} + 3H\delta\dot{\phi}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_{\mathbf{k}} + V''\delta\phi_{\mathbf{k}} = -2\dot{\psi}_{\mathbf{k}}V' + 4\dot{\psi}_{\mathbf{k}}\dot{\phi}. \quad (3.52)$$

<sup>10</sup> $V$  与  $\phi$  无关, 则  $V$  为一常数, 显然我们下面的慢滚条件也是严格成立的, 因为此时  $\epsilon = \eta = 0$ .

<sup>11</sup>这里需要注意, 我们是假设了单场暴涨的简单情形.

因为我们关心的是超视界尺度的物理, 于是有  $|4\dot{\psi}_{\mathbf{k}}\dot{\phi}| \ll |\psi_{\mathbf{k}}V'|$  (从扰动的爱因斯坦方程(3.35)得到), 再考虑慢滚方程  $-V' \simeq 3H\dot{\phi}$ , 我们可以重新把上面的方程简化为:

$$\delta\ddot{\phi}_{\mathbf{k}} + 3H\delta\dot{\phi}_{\mathbf{k}} + (V'' + 6\epsilon H^2)\delta\phi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (3.53)$$

重新定义变量  $\delta\chi_{\mathbf{k}} = \delta\phi_{\mathbf{k}}/a$ , 在共形时间下方程变为:

$$\begin{aligned} \delta\chi_{\mathbf{k}}'' - \frac{1}{\tau^2} \left( \nu^2 - \frac{1}{4} \right) \delta\chi_{\mathbf{k}} &= 0, \\ \nu^2 &= \frac{9}{4} + 9\epsilon - 3\eta. \end{aligned} \quad (3.54)$$

于是在超视界情况下, 扰动

$$|\delta\phi_{\mathbf{k}}| \simeq \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left( \frac{k}{aH} \right)^{\frac{3}{2}-\nu}.$$

最后得到功率谱:

$$P_{\mathcal{R}} \propto \left( \frac{k}{aH} \right)^{2\epsilon-6\eta}. \quad (3.55)$$

也就是说在慢滚近似下  $\epsilon \ll 1$  和  $\eta \ll 1$ , 功率谱基本上与物理波长  $k$  无关. 这个与现代宇宙学观测完全吻合.

### 3.2.2 混沌暴涨模型

最简单的混沌暴涨模型[65]的最大优点<sup>12</sup>就是, 它真正意义上解决了平坦性问题, 视界问题, 均匀性问题, 质量和熵问题. 因为它可以从宇宙刚产生的时候马上开始暴涨, 此时宇宙的能量密度最大为  $M_p^4$ , 尺度大小为 Planck 长度, 有最小的密度  $M \sim M_p$ , 及其熵  $S \sim O(1)$ .

在 Planck 时间即  $t \sim t_p \sim M_p^{-1}$  之后, 当宇宙的能量密度小于  $M_p^4$  时, 宇宙的演变就可以用经典的动力学来描述. 在 Planck 时间之前, 我们一般假设宇宙处于某种混沌的量子态. 最简单的混沌暴涨模型[65], 假设势能形式为:  $V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda\phi^4$ , 而且  $\lambda \ll 1$ . 假如  $\lambda$  足够小的话, 我们没有理由期望在  $t \sim t_p$  的时候, 暴涨子  $\phi$  应该在零点. 相反地,  $\phi$  场应该在  $-M_p/\lambda^{1/4}$  到  $M_p/\lambda^{1/4}$  之间任意取值. 特别的, 在  $t \sim t_p$  时, 应该存在无穷多的局域均匀的, 各向同性的区域, 其大小  $l \gg M_p^{-1}$ , 其中的场  $\phi$  有  $M_p \leq \phi \leq M_p/\lambda^{1/4}$ . 简单的计算表明如此发生在宇宙

<sup>12</sup>混沌暴涨模型的这个优点, 相比于更早些出现的所谓“新暴涨模型[58, 59]”可以看得更清楚.

早期的不平衡的场构造, 没有快速的消失掉—即滚到势能极小的场位形中去, 而是导致了宇宙甚早期的暴涨.

在甚早期宇宙的某区域内, 其中充斥着均匀的场 $\phi$ . 此时 $\phi$ 场的运动方程为:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\lambda\phi^3 \quad (3.56)$$

如此我们可以得到在 $\phi^2 \gg M_p^2/6\pi$ 时,

$$\phi = \phi_0 \exp\{-[\sqrt{\lambda}M_p/(6\pi)^{1/2}]t\} \quad (3.57)$$

其中 $\phi_0$ 为 $\phi$ 场在 $t = 0$ 时刻的值, 所以在 $\Delta t \sim (6\pi)^{1/2}/\sqrt{\lambda}M_p$ 的时间内,  $\phi$ 场值会显著的减少, 但是这个 $\Delta t$ 远远大于Planck时间<sup>13</sup> $t_p \sim (6M_p)^{-1}$ , 只要耦合常数 $\lambda$ 足够小. 为了解决标准宇宙学中的视界问题, 需要有足够的e叠数( $N \gtrsim 60$ ), 应用到方程(3.56)和Eq.(3.57), 我们得到只要要求 $\phi_0 \gtrsim 3M_p$ 就足够了. 只要 $\lambda \lesssim 10^{-2}$ 可以满足这样一个 $\phi_0$ , 使得初始时候的势能 $V_0 = \frac{1}{4}\lambda\phi_0^4 \lesssim M_p^4$ .

在前面的分析中, 我们忽略了早期宇宙中对势能的高温修正, 而这种修正往往导致某种对称性的恢复, 从而使得 $\phi$ 场回到原点. 然而只要 $\phi$ 场初始时足够大( $\phi \gtrsim M_p$ ), 而且 $V(\phi) \gtrsim 10^{-5}M_p$ , 这些高温修正导致的对称性恢复就不会发生. 一般对 $\phi$ 场的有效质量的高温修正有 $\Delta m^2(T) = cT^2$ , 其中 $c$ 为一常数. 对不同的模型 $c$ 的取值不同, 对一般的大统一模型而言 $c = O(1)$ . 在这种情况下, 要由高温修正使得 $\phi$ 场跑回原点, 也就是使得 $\phi$ 场完成一次振动所需要的时间 $t \sim T^{-1}$ . 由于在暴涨期间, 势能的值本质上是恒定的, 如此我们假定由相对论性粒子引起的高温. 如此从标准宇宙学中, 我们得到 $t = \sqrt{\frac{45}{16\pi^3 N}}M_p/T^2$ , 其中 $N$ 为理论中有效的自由度, 在大统一理论中 $N \gtrsim 200$ . 如此由 $t \sim T^{-1}$ , 可得 $T \lesssim M_p/50$ 高温修正才能起作用, 然而此时, 相对论性粒子的能量 $\rho = \frac{1}{30}N\pi^2T^4$ 远远小于混沌暴涨模型中的能量密度 $M_p^4$ . 综上所述, 有限温度的修正在混沌暴涨模型中完全可以忽略.

然则混沌暴涨模型中,  $\phi$ 场的初始值大大大于Planck能标. 一般的假设理论的有效势能形式为:

$$V(\phi) = V_0 + \alpha\phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\beta}{3}\phi^3 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \sum_n \lambda_n \frac{\phi^{4+n}}{M_p^n}, \quad (3.58)$$

<sup>13</sup>这里对Planck时间的估计可以这么得到. 在Planck时间, 我们要求其能量密度 $\rho_p = M_p^4$ . 假设初始的宇宙学能量密度有相对论性物质占据主导, 则有 $\rho = \frac{3}{32\pi}M_p^2 t^2$ , 如此可以反推出在Planck时间,  $t_p \sim (6M_p)^{-1}$ .

则势能由高阶不可重整项占主导, 理论散失可预测性. 因此一般的在粒子物理模型中, 我们只讨论暴涨场小于Planck能标时的暴涨. 然而Linde认为上面的有效势值得商榷[66], 因为标量场的恒定部分(即每个场 $\phi$ 总是可以分解成 $\phi = \langle \phi \rangle + \delta\phi$ , 恒定部分值其中的真空期望值部分)没有直接出现在引力相互作用的Feynman图中, 而只有有效势 $V(\phi)$ 和与 $\phi$ 场相互作用的粒子的质量项出现. 因此量子引力效应导致的项不应该是(3.58)中的 $\frac{\phi^{4+n}}{M_p^n}$ , 而是 $\frac{V}{M_p^4}$ 或者 $\frac{m^2(\phi)}{M_p^2}$ . 因此庞大的初始值( $M_p \leq \phi \leq M_p/\lambda^{1/4}$ )并不会影响理论的可预测性. 不过需要注意的是, 一般的粒子物理模型并不满足这一点, 如超引力理论.

### 3.2.3 杂化暴涨模型

一般的, 暴涨模型通过暴涨子的慢滚, 而且逐渐的越滚越快, 或者通过一阶相变来结束暴涨. Linde在[67]中构造了一种快速结束暴涨的模型. 模型中有两个场, 一个暴涨子在暴涨时发生慢滚, 当其滚到某个临界值时, 另一个本来在暴涨时固定在原点的场, 突然自发地导致某种对称性破缺, 使得暴涨子快速下滚而结束暴涨. 这个模型看起来像是混沌暴涨模型和某种自发对称破缺的模型的混合, 所以Linde称呼其为杂化暴涨模型(hybrid inflation model).

杂化暴涨模型的势能有:

$$V = \frac{1}{4}\lambda(M^2 - \psi^2)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\lambda'\psi^2\phi^2. \quad (3.59)$$

其中 $\lambda$ 和 $\lambda'$ 为耦合常数,  $M$ 为能量标度,  $\phi$ 场为暴涨子,  $\psi$ 为辅助场. 分析势能中 $\psi$ 场和 $\phi$ 场的曲率, 发现当 $\phi$ 场的值大于某个临界值( $\phi_c = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}M$ )时,  $\psi$ 场的曲率远远大于 $\phi$ 场的曲率(只要 $\phi$ 场的质量 $m$ 足够小.), 从而很快的滚到 $\psi$ 场的最小值, 即 $\psi_{min} = 0$ . 然而当 $\phi$ 场慢慢的滚过临界点时,  $\psi$ 场得到一个负曲率, 从而其值迅速增大到 $M$ ,  $\phi$ 场则滚到原点, 破坏了 $\phi$ 场的慢滚条件. 暴涨结束.

## 3.3 超对称暴涨模型

自从杂化暴涨模型[67]提出之后, 如何在粒子物理模型中建立实际的暴涨模型引起了大量的关注[68]. 一些比较漂亮的模型在超对称背景下很快就被建立了起来. 事实上不管混沌暴涨模型中的势能 $V = \lambda\phi^4$ 或者杂化暴涨模型中的势能(3.59), 都是树图水平的结果, 考虑圈图的修正往往破坏模型中的慢滚的效果. 考虑超对称将有助于树图或者量子修正使得势能更容易实现慢滚暴涨. 下面

我将简要介绍一下两个简单的模型, Dvali等人的DSS暴涨模型[69], Randall等人的[70]超级自然暴涨模型(supernatural inflation). DSS模型在我们下一章节中着重讨论的模型, 其中用超对称破缺时伴随的平坦方向来实现慢滚暴涨, 利用了平坦方向在树图水平上的势能为0的优点. 超级自然暴涨模型, 则用最小超对称标准模型中的标量场作为暴涨子, 利用的则是圈图对MSSM中标量场的质量修正自然是一个小量——也正是软破缺的唯象要求.

### 3.3.1 超级自然暴涨模型

Randall, Soljatic和Guth的超级自然暴涨模型, 意思是利用超对称理论里面的自然的能标得到合适的暴涨模型, 而且可以得到自然足够的暴涨e叠数, 及其自然的恰当的密度扰动.

在超级自然暴涨模型中, 我们一般有如下势能形式:

$$V = M^4 \mathcal{G}(|\psi|/f) + g(|\psi|, |\phi|) + m^2 |\phi|^2, \quad (3.60)$$

其中可以把 $\phi$ 场想象为最小超对称标准模型的平坦方向, 起暴涨子作用.  $\psi$ 为模场, 比如说是超弦理论从10维紧化到4维时伴随的模场.  $M$ 为超对称破缺自发破缺时的能标,  $f$ 为模场中某种额外的整体对称破缺能标,  $m^2 |\phi|^2$ 是软破缺项. 如此我们可以粗略估算一下这个模型的e叠数和所产生的密度扰动的量级.

$$N \approx \int d\phi \frac{H}{\dot{\phi}} \approx - \int \frac{H^2 d\phi}{m^2 \phi} \approx \frac{M^4}{m^2 M_p^2} \ln\left(\frac{\phi_i}{\phi_e}\right). \quad (3.61)$$

由于在超对称破缺传播到超对称标准模型时, 自然有 $M \sim m M_p$ , 如此上面式子中的e叠数自然是 $O(1)$ 的量级, 与解决大爆炸标准宇宙学所需要的60个e叠数大致相当. 再来看密度扰动:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \approx \frac{H^2}{\dot{\phi}} \approx \frac{H^3}{m^2 \phi} \approx \frac{M^6}{M_p^3 m^2 \phi}. \quad (3.62)$$

考虑到在杂化暴涨模型中, 暴涨子在暴涨结束的时候 $\phi \sim M$ . 而且跟前面提到过的一样 $M \sim m M_p$ , 所以密度扰动 $\sim M/M_p \sim 10^{-7.5}$ , 与宇宙学实现观测大致相当<sup>14</sup>.

<sup>14</sup>略微大于实验观测的 $10^{-5}$ , 不过我们这里只是估计. 相对于单场暴涨模型来说,  $\frac{\delta\rho}{\rho} \approx (M/M_p)^2$ 已经好了很多. 调节暴涨结束时 $\phi$ 场的值, 使其小于 $M$ , 可以大大提高与实验观测的相符程度.

可惜的是这种模型已经被WMAP实验排除[73], 也许寻找它的改进版是个有趣的问题. 超级自然暴涨模型自然导致了蓝谱, 就是说他的谱指标大于1, 与WMAP实验得到的蓝谱刚好相反. 从谱指标公式可以得到 $n = 1 + 2\eta$ , 由于这个模型中 $\phi$ 场的质量项必须为正, 所以 $\eta = \frac{M_p^2 V''}{V} > 0$ , 导致 $n > 1$ .

### 3.3.2 DSS暴涨模型

Dvali, Shafi和Schaefer三人在94年, 也就是Linde提出杂化暴涨模型之后一年, 马上在超对称破缺模型中找到了它的一种自然实现. 而且在这个模型中可以避免超引力的修正, 自然没有所谓的超引力 $\eta$ 问题<sup>15</sup>—即 $\eta \geq 1$ . 进一步的在[71]中, 从超对称规范理论出发, 给出了DSS暴涨模型的所需的暴涨势的动力学来源.

Dvali等人假设了暴涨的势能由如下超势可以得到.

$$W = g\Phi\Psi\bar{\Psi} - \mu^2\Phi. \quad (3.63)$$

其中 $\Phi, \Psi, \bar{\Psi}$ 为手征超场, 一般我们用它们各自的小写字母表示手征超场中的标量分量. 我们还假设了最简单的Kahler势, 即等于所有场的模方求和. 如此我们可以得到势能形式与杂化暴涨模型Eq.(3.59)类似:

$$V = (g|\psi|^2 - \mu^2)^2 + 2g^2|\phi|^2|\psi|^2. \quad (3.64)$$

其中我们假设了 $V_F \gg V_D = 0$ , 所以我们取了 $D - flat$ 的方向,  $\psi^* = \bar{\psi}$ . 上面势能的形式是树图的结果, 考虑到 $\phi$ 为树图时的平坦方向, 一般需要考虑在一圈时的Coleman-Weinberg有效势的修正. 上面的势能(3.64)有唯一的超对称极小值, 在

$$\langle\phi\rangle = 0, M_X \equiv \langle\psi\rangle = \mu/\sqrt{g}.$$

考虑到在宇宙学早期的混沌的初始条件. 对于 $\phi$ 场来说, 其取值范围可以为 $\phi > \phi_c = \mu/\sqrt{g}$ , 此时势能的极值有 $\langle\psi\rangle = \langle\bar{\psi}\rangle = 0$ . 也就是说, 在 $\phi > \phi_c$ 时, 能量密度 $\mu^4$ 项占主导. 如此一个恒定的势能项就可以导致暴涨.

<sup>15</sup>当然这里包含了不自然的假定—即只有可重整的超势和Kahler项. 但相对于一般的 $F - term$ 暴涨模型而言, 这已经是DSS模型的一大优点了. 我们将在下一章看到DSS模型和 $D - term$ 暴涨模型有着类似的优缺点—在可重整的水平上避免了 $\eta$ 问题.

在 $\langle\psi\rangle = \langle\bar{\psi}\rangle = 0$ 时, 从方程(3.64)中可以看出, 没有相互作用驱使 $\phi$ 场跑到它的最小值, 所以考虑量子修正就很有必要了. 在整体超对称(global supersymmetry)之后, 可以有一圈有效势如下:

$$\Delta V(\phi) = \sum_i \frac{(-1)^F}{64\pi^2} M_i(\phi)^4 \ln\left(\frac{M_i(\phi)^2}{\Lambda^2}\right), \quad (3.65)$$

其中要对所有的自旋态求和,  $(-1)^F$ 说明玻色子和费米子贡献相反的符号,  $\Lambda$ 表示重整化质量. 这个量子修正将有助于驱动 $\phi$ 场往原点跑.

注意到在 $\phi > \phi_c$ 时, 在规范超多重态(gauge supermultiplets)和 $\Phi$ 超场没有质量分裂(实际上 $\Phi$ 的标量和费米子分量的质量都为0). 最后有效势为:

$$\begin{aligned} V_{eff}(\phi) = & \mu^4 + \frac{g^4}{32\pi^2} [2\mu^4 \ln\left(\frac{g^2|\phi|^2}{\Lambda^2}\right) \\ & + (g\phi^2 - \mu^2)^2 \ln\left(1 - \frac{\mu^2}{g\phi^2}\right) + (g\phi^2 + \mu^2)^2 \ln\left(1 + \frac{\mu^2}{g\phi^2}\right)]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

假如 $\phi$ 远远大于临界值 $\phi_c$ ,  $V_{eff}$ 可以约化到更简单的形式

$$V_{eff}(\phi \gg \phi_c) \approx \mu^4 \left[ 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \left( \ln \frac{g^2 \phi^2}{\Lambda^2} + 2 \right) \right]. \quad (3.67)$$

简单计算这个暴涨模型的可观测量: 谱指标 $n_s$ 和密度扰动如下:

$$n_s \simeq 1 - \frac{1}{N_e}, \quad \frac{\delta\rho}{\rho} \simeq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{N_e}{45}} \left( \frac{\Lambda^2}{M_p^2} \right). \quad (3.68)$$

其中 $N_e$ 为暴涨模型的e叠数. 如此为了解决标准模型的诸多问题要求暴涨模型的e叠数约为60, 再假设DSS暴涨模型中 $\Lambda$ 是大统一模型的能标, 则 $n_s$ 和密度扰动都与WMAP 3年观测结果符合[73].

与上一小节中Randall等人的超级自然暴涨模型相比, 也许DSS暴涨模型最大的好处是自然得到了实验要求的蓝谱. 这一点可以简单的从上面谱指标的公式 $n_s \simeq 1 - \frac{1}{N_e}$ 看出来, 因为暴涨数总是正当, 从而得到小于1的 $n_s$ , 也就是蓝谱. 另一面从势能的表达式来看, 慢滚暴涨中我们总是有 $n_s = 1 + 2\eta - 6\epsilon$ , 而且 $\epsilon \ll \eta$ . 简单的可以验证这两式子在DSS暴涨模型和Randall等人的超级自然暴涨模型中都是成立的. 所以为了得到小于1的 $n_s$ , 我们要求得到 $\eta \equiv M_p^2 \left( \frac{V''}{V} \right)^2 < 0$ . 显然对于超级自然暴涨模型而已,  $\phi$ 场的软质量项必定是正的, 注定与WMAP实验观

察不符. 而DSS模型则因为暴涨子的质量项由 $\ln$ 函数提供, 从而得到负的两阶导数项, 也就是负的 $\eta$ , 从而保证了蓝谱的实现.

在模型建设角度来看, DSS暴涨模型也有自己的不足. 总的来说, 就是DSS暴涨模型中要有足够的e叠数, 则要求暴涨时暴涨子的真空期望值很大, 接近于Planck能标; 而超级自然暴涨模型则只要求暴涨子接近超对称自发破缺的能标就行了. 可以如下估计e叠数.

$$N_e \sim \int d\phi \frac{H}{\dot{\phi}} = \int \frac{3H^2}{-V'} d\phi. \quad (3.69)$$

DSS暴涨模型中必然涉及到不可见场(Hidden sector fields)的一圈修正, 所以

$$V = \mu^4 + \frac{g^2}{16\pi^2} \mu^4 \ln \phi^+ \phi + \dots \quad (3.70)$$

代入 $N_e$ 的式子可得:

$$N_e \sim \frac{\Delta\phi^2}{M_p^2} \frac{16\pi^2}{g^2}. \quad (3.71)$$

其中圈因子 $\frac{g^2}{16\pi^2}$ 可以大致估算为 $100^{-1}$ . 如此要求 $N \sim 60$ 则有 $\Delta\phi \sim M_p$ . 显然在一般的超对称破缺模型里面可以假设这样初始值的存在, 但是不为现有的低能超对称模型喜欢, 举个例子, 在亚稳的ISS模型里面如此大的场真空期望值是完全不可实现的. 实际上如果某个场值接近Planck能标时, 它的不可重整的超势及Kahler势的效应往往无法忽略, 而导致无法有效计算; 或者说必须存在某种额外的整体对称性来禁止这些不可重整项的产生——然而这些不可重整项很多时候又很有用, 比如下面一章我们将要提及的AD重子起源机制, 其中的不可重整的Kahler势将自然实现AD机制的初始条件.

引入适当的小参数项将有助于上面DSS模型中问题的解决, 甚至可以在某种程度上提高与WMAP观测到符合程度. 对于DSS暴涨模型中, 暴涨子 $\phi$ 的临界值 $\phi_c = \mu/\sqrt{g}$ , 当一圈修正势能驱动 $\phi$ 场往零点跑动, 一旦 $\phi$ 场越过这个临界点, 则辅助场 $\psi$ 得到真空期望值,  $\psi$ 场拥有不为0的荷的对称性自发的破缺了, 势能很快变为0, 暴涨自然结束. 然而至少在最初的DSS暴涨模型[69], 其实并不用等到暴涨子越过临界值, 暴涨才结束. 因为在此之前慢滚条件早就被破坏了<sup>16</sup>. 从方程(3.67)的修正可以算得, 在远大于 $\phi_c$ 阶段的暴涨期间, 在 $\phi_\eta = \frac{g}{2\pi} M_p$ 时, 我们就有 $\eta = 1!$  其中 $\phi_\eta$ 是指DSS暴涨模型中由于破坏了慢滚条件而导致暴涨结束时

<sup>16</sup>然而此时 $\psi$ 场真空期望值导致的对称自发破缺至少可以提供一种实现重新加热的机制.

的 $\phi$ 值. 此时预测暴涨模型有(3.68)式的谱指标, 取定 $N_e = 60$ , 则有 $n_s \simeq 1.98$ , 刚好在WMAP三年观测结果 $1\sigma$ 的边缘. 在[74]中, 作者选取适当的参数空间, 作者在 $N = 1$ 的超引力背景下计算了非最小Kahler势, 也就是包括了 $M_p^{-2}$ 因子压低的不可重整项, 对DSS暴涨模型的修正, 可以得到与WMAP实验的谱指标观测结果更加符合的情况. 参考图形(3.4). 从图中我们知道WMAP观测更喜欢有更小值的耦合常数 $g$ . 这样小的耦合常数往往导致 $\phi_c = \mu/\sqrt{g}$ 更加靠近 $\phi_\eta = gM_p/2\pi$ , 甚至更大. 实际上考虑到更加精确的有效势计算(3.66)和上面的小耦合常数 $g$ , 我们可以得到任意的 $\phi_c$ 和 $\phi_\eta$ 的关系. 暴涨结束的机制对接着的重新加热机制也有不可避免的影响[75, 76].

最后, 我们讨论一下DSS暴涨模型的超引力修正问题. 在一般超引力中, 势能形式有:

$$V_F = e^{K/M_p^2} [K_{i\bar{j}}^{-1} D_i W D_{\bar{j}} W^* - 3M_p^{-2} |W|^2], \quad (3.72)$$

其中 $K$ 表示Kahler势,  $K_{i\bar{j}}$ 表示 $K$ 对标记为 $i, \bar{j}$ 的超场求导.  $\bar{j}$ 表示的超场为 $j$ 表示的超场的复共轭. 超场我们统一用 $z$ 表示, 即 $z_i \in \{\phi, \psi, \dots\}$ , 于是

$$D_i W \equiv \frac{\partial W}{\partial z_i} + M_p^{-2} \frac{\partial K}{\partial z_i} W, \quad K_{i\bar{j}} \equiv \frac{\partial^2 K}{\partial z_i \partial z_{\bar{j}}^*}. \quad (3.73)$$

假设有最小形式的Kahler势, 对于方程(3.63)所示的超势, 我们有如下势能:

$$V_0 \simeq 2g^2 |\phi|^2 |\psi|^2 + (g|\psi|^2 - \mu^2)^2 \left(1 + 2\frac{|\psi|^2}{M_p^2} + \frac{|\phi|^4}{2M_p^4} + \frac{|\phi|^4}{M_p^4}\right) + \dots \quad (3.74)$$

其中 $V_0$ 是指树图水平的势能. 由此可见在暴涨时, 取定 $\langle \psi \rangle = 0$ , 暴涨子 $\phi$ 场的质量恰巧为0—也就是说自然避免了 $\eta$ 问题. 然而这并不是所有 $F - term$ 暴涨模型的性质, 而是DSS模型中特有的—因为他们的超势项中只有关于暴涨子的线性项, 把它们放在超引力背景下, 暴涨子获得的 $H_I$ 能标的质量刚好被超引力特有的 $-3M_p^{-2}|W|^2$ 给抵消掉了.

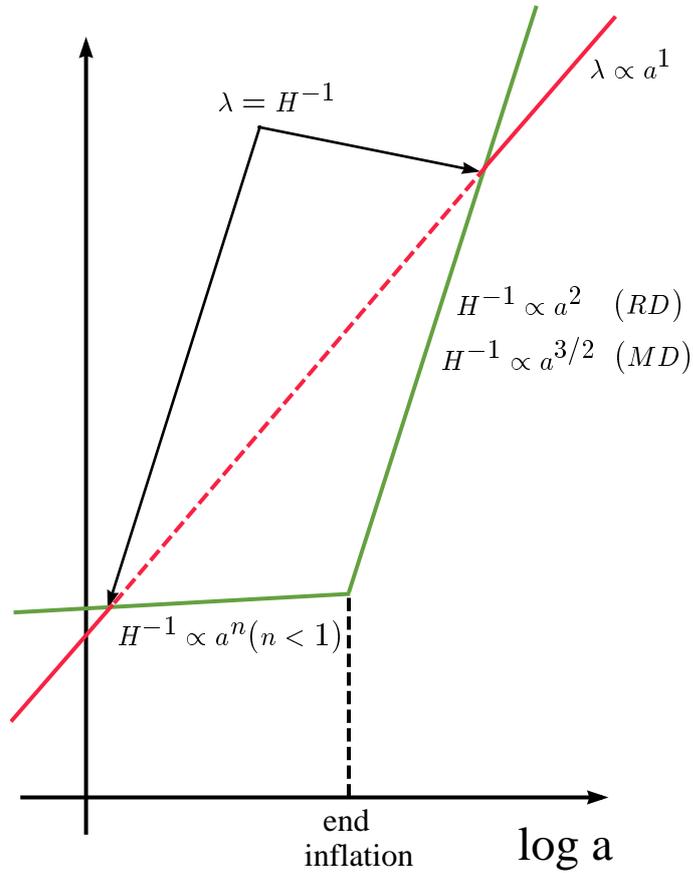


图 3.2: 图中RD表示辐射占主导时期, MD表示物质占主导时期, 我们统一用一条线表示. 绿色的线表示视界的演化过程, 首先在暴胀期间接近不变, 在RD时正比于 $a^2$ , 在MD时正比于 $a^{3/2}$ . 红线表示物理波长 $\lambda$ 的演化. 箭头所指是在物理波长等于视界 $H^{-1}$ 的两个时刻.

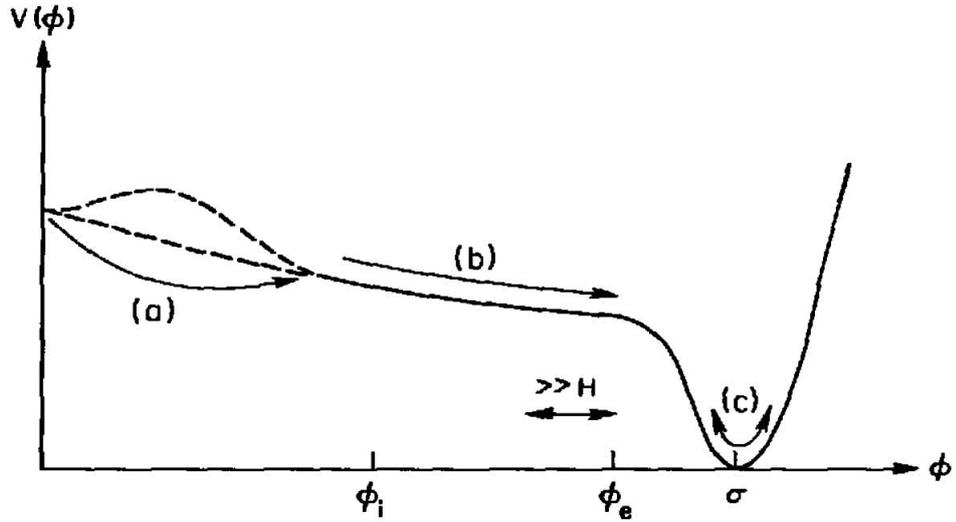


图 3.3: 慢滚暴涨模型的势能. 图中定性的表示出了暴涨开始和结束的三个不同位相:(a)势能隧穿阶段(假如必要的话), (b)慢滚阶段, (c)在势能极小值的相干振动.

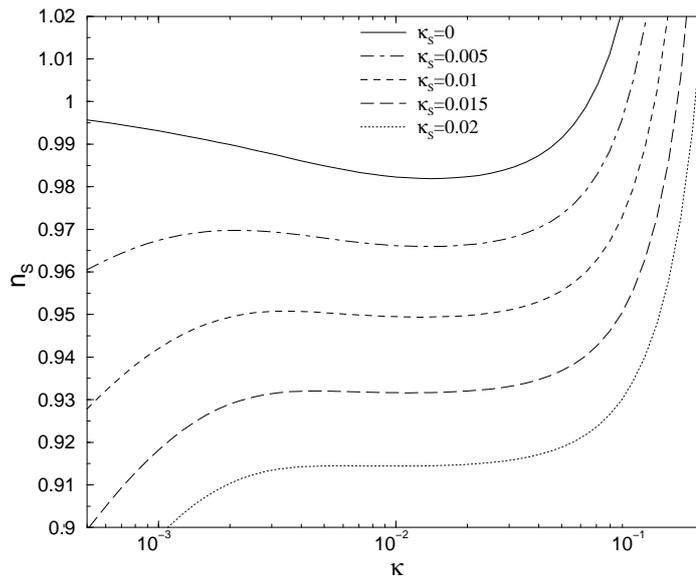


图 3.4: 考虑了非最小Kahler势修正之后DSS模型对谱指标 $n_s$ 的预测. 其中 $\kappa$ 相当于我这里的 $g$ , 而 $\kappa_s$ 是Kahler势修正项的耦合常数.  $\delta K = \kappa_s |\phi|^4 / (4M_p^2)$ .



## 第四章 超对称暴涨模型的限制

这一章我们主要讨论对杂化暴涨模型的限制,因为它结合了混沌暴涨模型的优点—自然的初始条件,和在粒子物理里有广泛应用的对称性自发破缺模型,从而得到了粒子物理学家大量的青睐.

我们的着重点将放在考虑宇宙学中另外一个经典过程—AD重子起源机制之后,对杂化暴涨模型额外的限制.在本章中,第一节将简单介绍一下AD重子起源及其发展[77, 78, 79],特别对其在最小超对称标准模型(MSSM)中的实现做了详细考察,更多结果参考文献[80].第二节简单介绍一下MSSM中的平坦方向[81].第三和第四节将分别讨论杂化暴涨模型的两种主要的超对称实现<sup>1</sup>—F项暴涨模型和D项暴涨模型[68],以及其中的限制[82].

### 4.1 AD重子起源机制

定义宇宙中重子数密度和光子数密度比值为:

$$\eta \equiv \frac{n_b - n_{\bar{b}}}{n_\gamma} \quad (4.1)$$

对类星体(quasar)吸收线中的氘的丰度的观察暗示[83]:

$$4 \times 10^{-10} \leq \eta \leq 7 \times 10^{-10}. \quad (4.2)$$

其中 $n_b$ 是重子数密度,  $n_{\bar{b}}$ 是反重子数密度,  $n_\gamma$ 是光子数密度. 通常我们利用熵密度公式 $s = 1.8g_*n_\gamma$ , 替换上面的 $n_\gamma$ , 其中 $g_*$ 是无质量粒子的有效自由度数, 不同理论模型和不同温度,  $g_*$ 有略微变化. 如此上面对 $\eta$ 的限制转换为:

$$5.7 \times 10^{-11} \leq \frac{n_b - n_{\bar{b}}}{s} \leq 9.9 \times 10^{-11} \quad (4.3)$$

重子起源的机制就是如何合理的得到这个数.

---

<sup>1</sup>在上一章的介绍中, 我们讨论的DSS暴涨模型是F项暴涨模型. 而超级自然暴涨模型的暴涨子相关项是用软项(soft term)实现的, 也就是说取决于提供软项的不可见场(hidden sector fields)的配置, 可以是F项暴涨模型, 也可以是D项暴涨模型.

在1967年Sakharov就已经指出重子起源必须满足三个条件[84]: (1)重子数不守恒的相互作用的存在. (2) $C$ 和 $CP$ 破坏. (3)理论中要有处在偏离平衡的时期. 在本节中, 将简单介绍一下Affleck和Dine在[77, 78]提出的一种重子起源机制. 这个机制考虑最小超对称标准模型中的平坦方向的演化, 简单的实现了上面三个条件. 首先那些平坦方向是粒子物理标准模型(standard model)中夸克和轻子的超对称伙伴, 同样也带有重子数. 构造一势能, 使其带有某个不守恒的 $U(1)$ 流, 也就可以得到重子数不守恒的相互作用. 实际上最小超对称标准模型中的A-term就满足这个要求( $A\phi\phi\phi + h.c.$ ). 其次, 在上面的A-term中只要耦合常数 $A$ 是复的, 自然导致 $C$ 和 $CP$ 破坏. 最后, Affleck-Dine机制要求在宇宙早期实现了标量场的凝聚, 随着宇宙的演化, 比如说到了物质占主导的时期, 标量场的凝聚发生相干振动, 从而发生相变. 也就是说此时处在非平衡时期. 综上所述, Affleck-Dine机制自然的实现了宇宙学中的重子起源的三个条件.

标量场在宇宙早期发生凝聚, 也就是说标量场某个相互作用组合的真空期望值不为0. 在[77]中, 这是一个假定, 某种机制自发的破缺了 $CP$ 对称性<sup>2</sup>. 然而在[78]中, 他们考虑最小超对称标准模型, 加上不可重整的超势项和一个非最小的Kahler势自然实现了标量场凝聚, 成功的实现了Affleck-Dine机制中的这个初始条件. 在[78]中, 这个凝聚将发生在暴涨时期, 以及辐射能占主导时期. 直到物质占主导, Hubble参数小于最小超对称标准模型中的质量能标(即 $m_{3/2} \sim TeV$ )时, 这个凝聚才发生相干振动, 并且衰变成普通的夸克或者轻子. 在接着的两节里面我们将发现这个凝聚在暴涨时期将给超对称的暴涨模型提出一些有用的限制, 反过来可以排除一些简单的平坦方向实现Affleck-Dine机制的可能.

下面我们首先将从一个简单的假想的势能出发, 也是Affleck和Dine起初考虑的势能[77], 并且假定标量场在初始时就有一个真空期望值, 讨论 $\phi$ 场(这里的 $\phi$ 场不同于上一章的 $\phi$ 场, 指的是平坦方向, 不是暴涨子)的演化. 然后我们再从最小超对称标准模型出发, 使其中平坦方向自然获得一个真空期望值, 实现标量场 $\phi$ 的凝聚.

在膨胀着的宇宙中, 标量场遵循一般的运动方程:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (4.4)$$

<sup>2</sup>或者暴涨时期的量子涨落使得平坦方向偏离原点. 但这样会...

为了考察 $\phi$ 场的随着时间演化的一般性质, 我们考虑一个假想势能如下:

$$V(\phi) = m^2|\phi|^2 + \lambda(\phi^4 + \phi^{*4}) + \frac{|\phi|^6}{M^2} + \dots \quad (4.5)$$

这个势能在 $CP$ 变换下不变, 但是 $CP$ 变换可以用假设一个特殊的初始条件来破坏:

$$\phi = i\phi_0, \quad \dot{\phi} = 0. \quad (4.6)$$

其中 $\phi_0$ 是实的. 重子数破坏的相互作用可以通过求相应的流方程得到. 方程(4.5)有部分守恒流 $j_\mu = i\phi^*\partial_\mu\phi$ , 其方程有:

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu(i\phi^*\partial^\mu\phi - i\partial^\mu\phi^*\phi) = i\lambda(\phi^{*4} - \phi^4). \quad (4.7)$$

如果 $\phi$ 很小, 流 $j_\mu$ 就近似守恒. 正如上面所说, 如果 $\phi$ 有一个初始值 $\phi_0$ , 则我们就有一个初始的破坏重子数的相互作用流. 令 $\phi = \phi_R + i\phi_I$ , 方程(4.5)可以重新写为:

$$\ddot{\phi}_I + 3H\dot{\phi}_I + \left[ m^2 + 12\lambda\phi_R\phi_I + \frac{3|\phi|^4}{M^4} \right] \phi_I = 4\lambda\phi_R^3 \quad (4.8)$$

$$\ddot{\phi}_R + 3H\dot{\phi}_R + \left[ m^2 + \frac{3|\phi|^4}{M^2} \right] \phi_R = 4\lambda(3\phi_I\phi_R^2 - \phi_I^3). \quad (4.9)$$

当宇宙处在物质占主导的时期,  $H = 2/(3t)$ , 所以在 $t \gg m^{-1}$ 时, 方程的解近似为:

$$\phi_k = \frac{A_k}{mt} \sin(mt + \delta_k), \quad k = I, R. \quad (4.10)$$

即 $\phi$ 场发生振动, 其中振幅 $A_k$ 和位相 $\delta_k$ 取决于参数 $m$ ,  $\lambda$ ,  $M$ 和 $\phi$ 场初始条件. 令上面的部分守恒流是重子数(至多差一个荷因子), 则我们可以从上面 $\phi$ 的解得到其能够产生的重子数为:

$$n_B = 2(\phi_I\dot{\phi}_R - \phi_R\dot{\phi}_I) = \frac{2A_I A_R}{mt^2} \sin(\delta_I - \delta_R). \quad (4.11)$$

当然要得到方程(4.2)所示的那么小的 $\eta$ , 还需要考虑 $\phi$ 场如何衰变到普通的夸克或者轻子. 由于下面章节中, 并未涉及相关计算, 我们就跳过不写.

在[78, 79], 重子起源的机制相对[77]有了比较重大的进展. 他们考虑了比较实际的势能形式, 在暴涨时期, 最小超对称标准模型的框架下, 考虑了非最小的Kahler势和不可重整超势项的修正, 如此其中平坦方向的势能有(考虑到平坦方向在树图近似下势能为0, 但会被软破缺项和超势中不可重整项提升.):

$$V(\phi) = (m^2 - cH_I^2)|\phi|^2 + \left( \frac{a\lambda H_I \phi^n}{nM^{n-3}} + h.c. \right) + |\lambda|^2 \frac{|\phi|^{2n-2}}{M^{2n-6}}. \quad (4.12)$$

其中 $a$ 和 $c$ 都是接近于1的常数,  $H_I$ 是宇宙暴胀时期的Hubble参数. 最后一项来自于不可重整的超势项 $W \supset \lambda\phi^n/M^{n-3}$ ,  $M$ 则是一个截断能标, 例如Planck能标或者大统一能标. 涉及到Hubble参数的项则来自于宇宙早期对模型的修正.

上面Hubble参数对 $\phi$ 场质量项的修正, 可以认为来自于非最小的Kahler势:

$$\delta K = \frac{1}{M_p^2} \chi \chi^\dagger \phi \phi^\dagger \quad (4.13)$$

其中 $\chi$ 场是暴胀时期占能量主导地位的场, 在混沌暴胀模型中就是暴胀子, 在杂化暴胀模型中就是占能量主导地位的那个辅助场. 于是我们得到 $\rho_I \simeq \langle \int d^4\theta \chi^\dagger \chi \rangle$ , 其中 $\rho_I$ 表示暴胀时期的能量—也就是由 $\chi$ 场地F-term来提供. 由于暴胀时期的Friedman方程 $H^2 = \frac{\rho_I}{3M_p^2}$ , 代入方程(4.13), 我们得到 $\phi$ 场的质量约为 $H_I$ 的量级<sup>3</sup>.

考虑在混沌暴胀模型中, 暴胀子与平坦方向耦合来源于引力相互作用, 于是我们一般应该超引力标量势:

$$V = e^{K/M_p^2} \left( D_i W K^{i\bar{j}} D_{\bar{j}} W^* - \frac{1}{3M_p^2} |W|^2 \right) + \frac{1}{8} f_{ab}^{-1} D^a D^b \quad (4.14)$$

$f_{ab}$ 是规范动能函数. 一般的考虑到暴胀子的势能, 对于平坦方向而言, 从超引力势能诱导的势能有如下形式:

$$V(\phi) = H_I^2 M_p^2 f(\phi/M_p) \quad (4.15)$$

其中 $f$ 是某种函数. 注意到这里 $\phi$ 场的曲率是Hubble参数的量级. 在宇宙早期, 我们得到平坦方向的质量的曲率为Hubble参数, 而不是 $m_{3/2}$ .

分析了方程(4.12)中各项的来源之后, 容易发现这个势能自然导致了在暴胀时期 $\phi$ 场有一个自然的真空期望值:

$$|\varphi_0| \simeq \left( \frac{\sqrt{c} H M^{n-3}}{(n-1)\lambda} \right)^{\frac{1}{n-2}}. \quad (4.16)$$

其中我们令平坦方向在取定真空期望值时记为 $\varphi_0$ . 类似上面对方程(4.5)的分析, 在接着平坦方向的衰变过程中, 这个模型同样也可以得到可观的重子数<sup>4</sup>. 在AD重子起源的机制中, 平坦方向的衰变也是一个比较热点的问题, 如在[88, 87]中讨论的Q-ball机制[89]. 我们这里不做讨论, 更多文献参考[80, 90]. 在接着的两节中, 我们将着重分析庞大的平坦方向的真空期望值给理论带来的影响.

<sup>3</sup> 注意在上面的势能中, 由Kahler势提供的项应该有一个额外的负号.

<sup>4</sup> 需要注意在零温的场论中, 我们不能要求平坦方向获得真空期望值, 因为这样会破缺电荷和色量子数

## 4.2 平坦方向

在经典的水平上, 一般的超对称规范理论总是拥有很大的真空简并度. 超对称中的可重整的标量势是F-terms和D-terms的平方和, 在场空间中, 取定一个方向使得这个方向上F-terms和D-terms都为0, 则我们称这个方向为平坦方向. 很大的真空简并度对应于有高维的平坦空间, 有时候我们也叫模空间<sup>5</sup>.

最小超对称标准模型中的平坦方向[79, 81], 可以被软的超对称破缺项破坏, 也可以被不可重整的超势项破坏. 一般的我们先考虑在可重整的水平且没有破缺超对称的情况下的平坦方向, 然后再考虑相应的破坏项之后剩余的平坦方向. 只考虑不可重整项的破坏作用, MSSM中最后的结果见表(4.2).

考虑一个有 $N$ 个手征超场的超对称模型, 理论上我们可以解方程 $V = (g_a^2/2)D^a D^a + \sum |F_i|^2 = 0$ 得到所有的平坦方向, 其中 $g_a$ 是模型中规范对称性的群耦合常数.  $V = 0$ 也可以分解成:

$$D^a = \Phi^\dagger T^a \Phi = 0, \quad (4.17)$$

$$F_i = \partial W / \partial \Phi = 0. \quad (4.18)$$

然而一个更加方便有用的方法是利用一个对应[17, 18, 19]: 某个手征超场的规范不变的全纯多项式对应于平坦空间中的某个D-flat方向. 作为一个例子, 我们考虑在MSSM中只涉及轻子部分的平坦方向, 在没有超势项(因为我们考虑D-flat)和软破缺项的情况下, 有标量势:

$$\begin{aligned} V &= \frac{g^2}{2} (D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) + \frac{g_Y^2}{2} D_Y^2 \\ D_1 &= \frac{1}{2} \sum_i (L_i^{\uparrow*} L_i^\downarrow + L_i^{\downarrow*} L_i^\uparrow); & D_2 &= \frac{i}{2} \sum_i (L_i^{\uparrow*} L_i^\downarrow - L_i^{\downarrow*} L_i^\uparrow); \\ D_3 &= \frac{1}{2} \sum_i (|L_i^\uparrow|^2 - |L_i^\downarrow|^2); & D_Y &= \frac{1}{2} \sum_i (2|e_i|^2 - |L_i^\uparrow|^2 - |L_i^\downarrow|^2) \end{aligned} \quad (4.19)$$

的守恒—粒子物理标准模型中的对称性[85, 86]. 在宇宙中, 则通常可以这么做, 只要在某个恰当的时刻通过某个相变使标准模型的真空产生就行了. AD机制中, 在物质占能量主导时, Hubble常数小于平坦方向的软破缺质量( $m_{3/2}$ ), 相干振动发生, 使得原本偏离真真空的平坦方向都回归到零点, 也就是说 $\phi'_0 = 0$ . 也就不会导致电荷和色对称性的破缺.

<sup>5</sup>在以前的弦理论论中, 模空间一般是紧的. 于是有些人提议紧的模空间仍然叫模空间, 而非紧的就叫做平坦空间. 以示区别. 最小超对称标准模型中, 平坦空间的非紧性可以这么看: 即使场的真空期望值为无穷大, 其导致的势能还是为0—这一点很快的我们将从下面的例子中看到.

其中 $D_i$ 表示对应于MSSM中 $SU(2)$ 相互作用的三个 $\sigma$ 矩阵.  $g$ 为 $SU(2)$ 的耦合常数,  $g'$ 为MSSM中 $U(1)$ 的耦合常数.  $L_i^\dagger$ 表示第 $i$ 代轻子双重态的上分量. 从上面的势能可以看出只要我们有:

$$L_i = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad L_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}; \quad e_k = \varphi$$

其中 $i \neq j$ , 沿着平坦方向,  $\varphi$ 是可变的, 从负无穷到正无穷. 我们可以标记这样的平坦方向为一个规范不变的组合 $L_i L_j e_k$ . 因为 $i, j, k$ 是代指标, 于是独立的 $L_i L_j e_k$ 组合有9个. 然而用这样的规范不变量的缺点是有可能重复计算了一些平坦方向, 因为除了 $SU(2) \times U(1)$ 的对称性外MSSM中还有 $SU(3)$ 对称性, 规范不变量的组合有一些恒等式, 例如这里的 $L_i L_j e_k$ 有:

$$(L_i L_j e_k)(L_{i'} L_{j'} e_{k'}) = (L_i L_{j'} e_{k'})(L_{i'} L_j e_k). \quad (4.20)$$

其中 $(L_i L_j e_k)$ 中的括号表示对 $L, e$ 场的色指标的缩并. 于是我们得到在MSSM中只有5个独立的 $L_i L_j e_k$ 规范不变量. 综上所述, 我们可以用规范不变量表示方程(4.17)的解, 即每一个不变量对应于一个D方向的平坦方向.

方程(4.18)的解也可以从考虑规范不变量出发. 通过考虑MSSM中的超势项, 包括可重整的和所有不可重整算符. 不可重整算符可以用其中的 $M_p$ 压低因子来特征表示, 如被 $M_p^{3-n}$ 压低的算子, 我们叫 $n$ 阶不可重整算符. 如此我们可以从表(4.2)中看到, MSSM中所有的平坦方向在考虑9阶不可重整算符时, 都已经没有了. 同样以 $L, e$ 的平坦方向为例. 从表(refmssmflat)中知道, LLe方向被 $n = 6$ 的不可重整超势完全提升. 具体的, 在可重整水平我们可以从方程:

$$F_{H_u}^\alpha = 0$$

得到两个关于 $L$ 场和 $e$ 场的限制, 也就是表(refmssmflat)中所示的考虑 $n = 3$ 的相互作用项, 平坦方向还是6个, 有复3维的平坦空间. 然而在 $n = 4$ 时, 并没有超势项可以提升这些平坦方向, 因为它们至少涉及到两个不是 $L$ 和 $e$ 的超场, 我们总是可以有满足方程(4.18)的解. 在 $n = 5$ 时, 唯一的相关超势项有:

$$W_5 \supset \frac{1}{M_p^2} H_u L L L e. \quad (4.21)$$

从限制方程 $F_{H_u}^\alpha = 0$ , 我们可以减除掉2维复的平坦空间<sup>6</sup>. 最后考虑到 $n = 6$ 的超

<sup>6</sup>首先在 $W_5$ 中, 对 $H_u^\alpha$ 场求导, 得到方程 $F_{H_u}^\alpha = 0$ 之后, 在方程两边同乘 $\epsilon_{\alpha\beta} L^\beta e$ , 其中 $\epsilon$ 是反对称张量. 因此这个F-term的方程减除了三个独立变量中的两个.

势项:

$$W_6 \supset \frac{1}{M_p^3} LLeLLe \quad (4.22)$$

提供了9个独立的 $F_L = 0$ 和 $F_e = 0$ 的限制方程, 完全提升了 $LLe$ 方向的平坦空间.

类似的, 可以分析MSSM中的平坦方向. 最后结果归纳为表(4.2).

### 4.3 F项暴涨模型及其限制

这里我们将只讨论上一章介绍的DSS暴涨模型, 因为它是F-term暴涨模型中最简单的最实际的杂化暴涨模型. 其中 $\phi$ 场是暴涨子, 实现慢滚. 而 $\psi$ 场是辅助场, 或者叫做瀑布场, 因为其在 $\phi$ 场值过某个临界值时 $\psi$ 会快速增大, 使得势能快速减少. 其中超势可以写成:

$$W(\Phi, \Psi) = g\Phi(\Psi^2 - \mu^2). \quad (4.23)$$

其中 $g$ 是耦合常数,  $\mu$ 实现了超对称破缺, 是超对称破缺的能标, 也是实现暴涨的势能的能标. 为了方便分析, 我们假设 $g$ 以及场值取实值. 在(3.2.3)小节, 我们知道杂化暴涨是混沌暴涨和整体对称性的自发破缺点结合. DSS模型里面的超对称自发破缺实现了后者, 而起到混沌暴涨作用的是暴涨子的质量项, 尽管在上面简单的超势项中并没有这样的质量项, 但是当超对称自发破缺时, 一圈的修正下的Coleman-Weinberg势自然的为暴涨子提供了一个质量项修正.

上面的超势中, 根据 $\psi$ 场和 $\phi$ 场取值不同存在不同的两个相位. 从简单的势能分析可以得到这一点. 我们有(为了简单起见, 设场为实场):

$$V = g^2(\psi^2 - \mu^2)^2 + 4g^2\phi^2\psi^2. \quad (4.24)$$

对其导数的计算, 我们发现在 $\phi$ 场大于临界值 $\phi_c = \sqrt{2}\mu$ 时, 真空能大于0, 从而处在暴涨相位. 当 $\phi$ 场小于临界值时,  $\psi$ 迅速增大, 最终导致在场空间 $(\Phi, \Psi)$ 中的超对称恢复, 但是 $\psi$ 场带有非零荷的整体对称性破缺了.  $\psi$ 场提供了一个负值的质量项是实现整体对称性破缺, 也就是说结束暴涨的关键. 然而正如我们上一节反复提及的暴涨时期平坦方向的庞大的真空期望值, 可能会抵消这个负值. 从而为了实现暴涨, 反过来限制了重子起源的AD机制中的可行的平坦方向.

从上一小节平坦方向的分析, 我们知道在F-term方向, 平坦方向(这一节及其以后, 我们将用 $\varphi$ 场来表示平坦方向), 可以导致最低幂次的相互作用有

表 4.1: 最小超对称标准模型中模空间的复维数

Flat directions	D-flat	Superpotential Terms						
		n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9
L,d	3	3	3	1	1	√		
L,e	5	3	3	1	√			
u,d	9	9	6	6	√			
u,e	3	3	√					
Q,L	12	12	√					
Q,u	15	13	√					
Q,u,e	18	16	1	1	1	1	1	√
L,u,d	12	12	9	5	√			
L,d,e	6	4	4	√				
L,u,e	6	4	√					
u,d,e	12	12	√					
Q,L,e	15	13	√					
Q,L,d	21	19	√					
Q,L,u	21	19	√					
Q,u,d	24	20	√					
L,u,d,e	15	13	√					
Q,L,d,e	24	22	√					
Q,L,u,e	24	20	√					
Q,u,d,e	27	23	√					
Q,L,u,d	30	26	√					
Q,L,u,d,e	30	29	√					

如  $LH_u \sim \varphi^2$ . 则一般即使在可重整化的水平<sup>7</sup>上有  $W \supset \lambda_1 \Psi LH_u$ , 在势能中相应的存在场  $\psi$  与平坦方向  $\varphi$  的耦合项  $\lambda_1^2 \psi^2 \varphi^2$ , 当平坦方向在AD重子起源机制中获得大的真空期望值, 记为  $\varphi_0$  (也就是式子(4.16)中的  $\phi_0$ ) 以至于:

$$\lambda_1 \varphi_0 > \sqrt{2} g \mu. \quad (4.25)$$

也就是说  $\psi$  并没有如原来杂化暴涨模型中的负质量项—没有了其优美的自动结束暴涨的机制. 实际上上面关于  $\varphi$  与能标  $\mu$  之间的关系, 利用公式(4.16)中  $n = 4$ , 正是平坦方向  $LH_u$  被提升所需的  $n$  值. (4.25) 式可以简单的换成一些耦合常数之间的关系:

$$\lambda_1^2 > \frac{6\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{c}} g. \quad (4.26)$$

而这些耦合常数从简单的量纲估计来看都应该是同一阶大小的, 出发某种目前未知的特别的压低机制起着作用. 于是我们找到了对于同时实现AD重子起源和杂化暴涨模型的一个参数限制.

自然的想法是通过某种机制压低类似上面的危险的耦合项  $\lambda_1$ , 使得不等式(4.25)无效. 但是在一般的杂化暴涨模型中比较困难, 因为由于平坦方向获得的真空期望值太大, 即使是Planck能标压低的不可重整相互作用项也有可能存在危险. 让我们考虑在最小超对称标准模型里面包含的物质场. 一般的我们可以得到辅助场  $\psi$  与最小超对称标准模型中的规范不变量耦合的超势项如下:

$$H_u H_d, \quad LH_u, \quad (4.27)$$

和

$$H_u Q_u, H_d L_e, Q L_d, u d d, L L e. \quad (4.28)$$

这里我们忽略了更高阶的平坦方向, 因为根据我们的具体计算, 他们并不构成威胁.  $H_u H_d, LH_u$  方向其实我们上面已经处理了, 接着我们考虑式子(4.28). 实际上式子(4.28)中各项可以用  $\varphi^3$  来统一表达, 因为这是导致树图水平小势能最小的平坦方向的取值. 一般的我们有不可重整的相互作用如下:

$$\lambda_2^2 |\varphi|^4 \psi^2 / M_p^2. \quad (4.29)$$

<sup>7</sup>在[78]中, 他们认为在超势中加上关于辅助场  $\psi$  与平坦方向的可重整的相互作用项, 会使得  $\psi$  场得到一个大质量而退耦掉, 于是对AD重子起源机制没有影响. 但是如果这个质量足够大, 尽管不影响重子起源, 但显然正如我们下面将要讨论的, 会对暴涨的机制有直接影响.

特别的在引力传导的超对称破缺模型中, 这样的耦合总是存在的, 正如在第一章相应章节中我们分析了一般的不可重整的Kahler势和超势导致的软破缺项. 当 $\varphi$ 场得到真空期望值时,  $\psi$ 就得到类似于软破缺的质量项, 但是一般由于暴涨过程中的势能要求的能标比低能超对称破缺要求的能标更大, 往往我们得到的 $\psi$ 更为危险.

从式子(4.16)可以看出,  $n$ 越大, 平坦方向得到的真空期望值也越大, 尽管他们跟辅助场 $\psi$ 的耦合会被 $M_p$ 压低. 一个直观的看法是假如 $n \gg 4$ , 则我们有 $\varphi_0 \sim M_p$ . 因而(4.29)告诉我们辅助场得到了一个大质量相, 阻碍了杂化暴涨模型的退出机制. 仔细计算表(4.2)中各个平坦方向, 我们可以得到在 $n = 6$ 时被提升的平坦方向 $LLe$ 和 $udd$ 正是这样的项.

#### 4.4 D项暴涨模型及其限制

超对称破缺的模型可以按照不为0的辅助场来分类, 即F-term和D-term超对称破缺模型. 同样在把超对称破缺的能标作为暴涨中的能标时, 在超对称理论中, 我们也有两类暴涨模型, F-term和D-term暴涨模型. 下面我们即将看到F-term暴涨模型之一的DSS模型和简单的D-term暴涨模型有很多相似之处, 如一圈的势能修正项自然导致蓝谱, 实现足够e叠数的困难, 在不可重整水平上的 $\eta$ 问题等. 同时下面我们也将描述一些D-term特有的性质, 如非最小规范动能项 $f_{ab}$ 引起的 $\eta$ 问题, 对AD重子起源中平坦方向大真空期望值引起问题的自然免疫等.

一般的F-term暴涨模型即使在可重整的水平上也就导致 $\eta$ 问题, 从而没有慢滚暴涨. 我们在介绍DSS暴涨模型时, 通过具体的计算表明其中并没有 $\eta$ 问题, 然而这仅仅是巧合, 而且是在可重整水平上的. 对于一般的暴涨模型, 我们可以从其势能形式估算如下.

$$V_F = e^{K/M_p^2} [K_{i\bar{j}}^{-1} D_i W D_{\bar{j}} W^* - 3M_p^{-2} |W|^2], \quad (4.30)$$

假设Kahler势是最小的, 即

$$K(\phi, \psi, \dots) = |\phi|^2 + |\psi|^2 + \dots \quad (4.31)$$

则 $V_F$ 中的 $e$ 指数项包含有 $|\phi|^2/M_p^2$ , 而中括号中 $D_i W D_{\bar{j}} W^*$ 贡献 $V_0 \sim \mu^4$ —假如势能由F-term占主导, 于是我们得到在超引力里一般任意的场都有Hubble参数量

级( $\sim \mu^4/M_p^2$ )的质量项. 通过定义 $\eta \equiv M_p^2 \left( \frac{V''}{V} \right)^2$ , 一般的我们得到 $\eta \simeq 1$ . DSS模型是避免这个 $\eta$ 问题的一种实现.

另一种实现, 我们可以放弃上面中的一个假定—势能由F-term占主导, 从而构建一个D-term暴涨模型[91, 92], 因为它的前面没有 $e$ 指数因子, 从而可以避免由超引力引力的 $\eta$ 问题. 简单的D-term暴涨模型可以从如下超势得到:

$$W = \lambda \Phi \Psi_+ \Psi_-, \quad (4.32)$$

其中 $\lambda$ 为耦合常数, 辅助超场 $\Psi_{\pm}$ 在反常的 $U(1)_x$ 规范群下带有 $\pm 1$ 的电荷. 假设Kahler势是最小形式, 则我们有势能:

$$V = |\lambda|^2 (|\psi_+ \psi_-|^2 + |\phi \psi_+|^2 + |\phi \psi_-|^2) + \frac{g_x^2}{2} (|\psi_+|^2 - |\psi_-|^2 + \xi^2)^2 \quad (4.33)$$

其中等号右边第一项是F-term的贡献, 第二项是D-term的贡献.  $g_x$ 是 $U(1)_x$ 群的耦合常数, Fayet-Iliopoulos项 $\xi$ 可以认为追溯到Green-Schwarz机制[93], 大约在 $10^{16}$  GeV的量级. 类似于DSS模型中的辅助场 $\psi$ , D-term暴涨模型中有 $\psi_{\pm}$ 场. 这个势能有保持超对称的位相, 即当 $\phi = 0$ ,  $\psi_+ = 0$ ,  $\psi_- = \xi$ 时, 势能为0. 然而假如 $\phi$ 场在一开始时偏离上面的极小值足够远的话, 我们可以得到局域的极小值, 可以发现这个极小值正是我们需要的暴涨的位相. 分析势能 $V$ 及其导数, 我们得到 $\phi$ 场大于某临界值 $\phi_c = g\xi/\lambda$ 时, 树图水平上势能有 $V = g^2\xi^4/2$ , 从而导致暴涨. 此时辅助场的值为 $\psi_+ = \psi_- = 0$ , 而且此时的势能与 $\phi$ 场无关, 也就是说在树图水平上, 势能在暴涨子的场方向上是完全平坦的. 一圈的修正告诉我们这个暴涨的相位将慢慢的向保持超对称的相位演化, 从而结束暴涨. 而且这个一圈的修正总是有个圈图因子( $g_x^2/16\pi^2$ )的压低, 也就是说此时势能还是足够的平坦.

然而如果考虑到不可重整的超势或者非最小的规范动能项, 这样简单的D-term暴涨模型并未真正避免 $\eta$ 问题. 在考虑这个 $\eta$ 问题之前, 我们先做D-term暴涨模型中 $e$ 叠数 $N_e$ 的估算. 在树图水平上的超对称破缺, 导致有类似于DSS模型中的一圈修正:

$$\Delta V \simeq cV_0 \frac{g_x^2}{16\pi^2} \ln \left( \frac{\phi^2}{\Lambda^2} \right). \quad (4.34)$$

其中 $c$ 是一个一阶大小的常数,  $V_0$ 是指树图水平的势能,  $\Lambda$ 是理论的截断能标. 类似于DSS模型中的结果, 为了在暴涨时满足慢滚的要求( $\eta < 1$ ), 至少

有 $\phi > g_x/4\pi M_p$ . 进一步的为了解决宇宙学中的平坦问题和视界问题, 我们要求慢滚暴涨至少提供60个e叠数, 则有 $\phi_{60} \simeq \sqrt{15c} g_x M_p/\pi$ . 假如耦合常数没有足够的小, 如此大的 $\phi$ 显然会导致不可重整项修正过大的问题. 例如我们考虑有额外的超势项:

$$\delta W = \lambda' \frac{\Phi^n}{M_p^{n-3}}. \quad (4.35)$$

这里 $\lambda'$ 是耦合常数,  $n > 3$ . 这种额外项将导致的修正有:

$$\delta\eta \simeq \frac{4n^2(n-1)(2n-3)\lambda'^2\phi^4}{g_x^2\xi^4} \left(\frac{\phi}{M_p}\right)^{2n-8} \quad (4.36)$$

考虑到 $\phi_{60} \simeq M_p$ , 假设 $g_x \sim 1$ , 则显然有 $\Delta\eta \gg 1!$  同样考虑非最小的规范动能项:

$$\frac{\Phi^n W^\alpha W_\alpha}{n! M_p^n} + h.c. \quad (4.37)$$

这里的 $n$ 可以是大于等于1的整数. 这样的算子对慢滚参数 $\eta$ 也有额外的贡献:

$$\delta\eta \simeq \frac{1}{(n-2)!} \left(\frac{\phi_{60}}{M_p}\right)^{n-2} \sim O(1). \quad (4.38)$$

当然我们可以引入分立的对称性来禁止这些算子的出现(不可重整的超势项和非最小的规范动能项), 例如 $R$ 对称性. 不像在DSS暴涨模型中非最小的Kahler势无法用对称性来禁止—也许这是D-term暴涨模型最大的优势.

接着我们类似在F项暴涨模型中对AD重子起源机制的分析, 即引入辅助场与最小超对称标准模型中平坦方向的耦合项:

$$\delta\mathcal{L} = \int d\theta^4 (\kappa_1 |\Phi|^2 + \kappa_2 |\Psi_+|^2 + \kappa_3 |\Psi_-|^2) \left(\frac{\varphi^+\varphi}{M_p^2}\right) + \dots \quad (4.39)$$

其中 $\kappa_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ 均为耦合常数. 很容易考虑上面方程中的非最小Kahler势影响, 结合方程(4.33), 我们得到修正之后的D-term有 $(-\mathcal{L} \supset 1/2 D^a D^a)$ :

$$D^a = |\psi_+|^2 - |\psi_-|^2 + \xi^2 \pm \frac{\varphi^+\varphi}{M_p^2} |\psi_\pm|^2 + \dots \quad (4.40)$$

其中指标 $a$ 是指 $U(1)_x$ 的荷指标. 方程中非最小Kahler势前面的 $\pm$ 号对应后面的 $\psi_\pm$ . 暴涨时期有 $\langle\phi\rangle > \phi_c$ ,  $\langle\psi_+\rangle = \langle\psi_-\rangle = 0$ , 暴涨结束重新加热时期势能的极小点是: $\langle\phi\rangle = 0$ ,  $\langle\psi_+\rangle = \langle\psi_-\rangle = 0$ . 在这两个时期都有<sup>8</sup> $F_\phi = F_{\psi_+} = F_{\psi_-} = 0$ , 但

<sup>8</sup>其中 $F_\phi = 0$ 是因为我们用分立对称性禁止了类似于方程(4.35)的耦合作用项.

是暴涨时期的D-term为0, 只有在重新加热时期,  $D^a$ 中的第三项与第四项交叉耦合导致平坦方向有一个负质量项, 而且跟暴涨时期的Hubble参数同量级.

辅助场与平坦方向耦合的不可重整超势项的修正有:

$$\delta W(\varphi, \psi) = \kappa_4 \frac{\Psi_+ \Psi_- \varphi^n}{M_p^{n-1}}, \quad (4.41)$$

其中 $\kappa_4$ 为耦合常数. 因为在暴涨时期和重加热时期都有 $F_\phi = F_{\psi_+} = F_{\psi_-} = 0$ , 于是在D-term暴涨模型中一般的 $\delta W(\varphi, \psi)$ 都没有影响. 相关D-term暴涨模型及其与重子起源机制的文章也有很多, 可以参考[94, 95].



## 参考文献

- [1] S. P. Martin, “A supersymmetry primer,” arXiv:hep-ph/9709356.
- [2] H. P. Nilles, “Supersymmetry, Supergravity And Particle Physics,” Phys. Rept. **110**, 1 (1984).
- [3] M. Drees and S. P. Martin, “Implications Of Susy Model Building,” arXiv:hep-ph/9504324.
- [4] D. J. H. Chung, L. L. Everett, G. L. Kane, S. F. King, J. D. Lykken and L. T. Wang, “The soft supersymmetry-breaking Lagrangian: Theory and applications,” Phys. Rept. **407**, 1 (2005) [arXiv:hep-ph/0312378].
- [5] S. Weinberg, ”The Quantum Theory of Fields III, ” Cambridge University Press, 2000.
- [6] J. Wess and J. Bagger, ”Supersymmetry and Supergravity,” Princeton University Press, 1992.
- [7] G. F. Giudice and R. Rattazzi, “Theories with gauge-mediated supersymmetry breaking,” Phys. Rept. **322**, 419 (1999) [arXiv:hep-ph/9801271].
- [8] M. A. Luty, “2004 TASI lectures on supersymmetry breaking,” arXiv:hep-th/0509029.
- [9] N. Seiberg, “Electric - magnetic duality in supersymmetric nonAbelian gauge theories,” Nucl. Phys. B **435**, 129 (1995) [arXiv:hep-th/9411149].
- [10] K. A. Intriligator and N. Seiberg, “Lectures on supersymmetric gauge theories and electric-magnetic duality,” Nucl. Phys. Proc. Suppl. **45BC**, 1 (1996) [arXiv:hep-th/9509066].
- [11] M. E. Peskin, “Duality in supersymmetric Yang-Mills theory,” arXiv:hep-th/9702094.

- [12] M. A. Shifman, “Nonperturbative dynamics in supersymmetric gauge theories,” *Prog. Part. Nucl. Phys.* **39**, 1 (1997) [arXiv:hep-th/9704114].
- [13] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, “Instantons Versus Susy,” *Sov. Phys. Usp.* **28**, 709 (1985) [*Usp. Fiz. Nauk* **146**, 683 (1985)].
- [14] J. Terning, “Non-perturbative supersymmetry,” arXiv:hep-th/0306119.
- [15] P. Fayet, *Phys. Lett.* **B69** (1977) 489; G. Farrar and P. Fayet, *Phys. Lett.* **B76** (1978) 575.
- [16] G. F. Giudice and R. Rattazzi, “Extracting supersymmetry-breaking effects from wave-function renormalization,” *Nucl. Phys. B* **511**, 25 (1998) [arXiv:hep-ph/9706540].
- [17] I. Affleck, M. Dine, and N. Seiberg, *Nucl. Phys. B* **241**, 493, 1984; *Nucl. Phys.* **B256**, (1985), 557.
- [18] F. Buccella, J. P. Derendinger, S. Ferrara, and C. A. Savoy, *Phys. Lett.* **B115**, 375, 1982.
- [19] M. A. Luty and W. Taylor, “Varieties of vacua in classical supersymmetric gauge theories,” *Phys. Rev. D* **53**, 3399 (1996) [arXiv:hep-th/9506098].
- [20] G. ‘t Hooft, *Recent Developments in Gauge Theories* (Plenum Press, 1980) 135; reprinted in *Unity of Forces in the Universe Vol. II*, A. Zee ed. (World Scientific 1982) 1004.
- [21] K. Intriligator, N. Seiberg and D. Shih, “Dynamical SUSY breaking in meta-stable vacua,” *JHEP* **0604**, 021 (2006) [arXiv:hep-th/0602239].
- [22] E. Witten, “Dynamical Breaking Of Supersymmetry,” *Nucl. Phys. B* **188**, 513 (1981). E. Witten, “Constraints On Supersymmetry Breaking,” *Nucl. Phys. B* **202**, 253 (1982).
- [23] I. Affleck, M. Dine and N. Seiberg, “Calculable Nonperturbative Supersymmetry Breaking,” *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1677 (1984). I. Affleck, M. Dine and

- N. Seiberg, “Dynamical Supersymmetry Breaking In Four-Dimensions And Its Phenomenological Implications,” Nucl. Phys. B **256**, 557 (1985).
- [24] K. I. Izawa and T. Yanagida, “Dynamical Supersymmetry Breaking in Vector-like Gauge Theories,” Prog. Theor. Phys. **95**, 829 (1996) [arXiv:hep-th/9602180]. K. Intriligator and S. D. Thomas, “Dynamical Supersymmetry Breaking on Quantum Moduli Spaces,” Nucl. Phys. B **473**, 121 (1996) [arXiv:hep-th/9603158].
- [25] S. R. Coleman, “The Fate Of The False Vacuum. 1. Semiclassical Theory,” Phys. Rev. D **15**, 2929 (1977) [Erratum-ibid. D **16**, 1248 (1977)].
- [26] M. J. Duncan and L. G. Jensen, “Exact tunneling solutions in scalar field theory,” Phys. Lett. B **291**, 109 (1992).
- [27] O. Aharony and N. Seiberg, “Naturalized and simplified gauge mediation,” JHEP **0702**, 054 (2007) [arXiv:hep-ph/0612308].
- [28] M. Dine, J. L. Feng and E. Silverstein, “Retrofitting O’Raifeartaigh models with dynamical scales,” Phys. Rev. D **74**, 095012 (2006) [arXiv:hep-th/0608159].
- [29] A. Giveon and D. Kutasov, “Stable and Metastable Vacua in Brane Constructions of SQCD,” arXiv:0710.1833 [hep-th].
- [30] C. Ahn, “Other Meta-Stable Brane Configuration by Adding an Orientifold 6-Plane to Giveon-Kutasov,” arXiv:0712.0032 [hep-th].
- [31] C. Ahn, “Meta-Stable Brane Configurations with Multiple NS5-Branes,” arXiv:0711.0082 [hep-th].
- [32] D. Shih, “Spontaneous R-symmetry breaking in O’Raifeartaigh models,” arXiv:hep-th/0703196.
- [33] R. Kitano, “Gravitational gauge mediation,” Phys. Lett. B **641**, 203 (2006) [arXiv:hep-ph/0607090]. M. Ibe and R. Kitano, “Gauge mediation in su-

- pergravity and gravitino dark matter,” *Phys. Rev. D* **75**, 055003 (2007) [arXiv:hep-ph/0611111].
- [34] H. Murayama and Y. Nomura, “Gauge mediation simplified,” *Phys. Rev. Lett.* **98**, 151803 (2007) [arXiv:hep-ph/0612186].
- [35] C. Csaki, Y. Shirman and J. Terning, “A simple model of low-scale direct gauge mediation,” *JHEP* **0705**, 099 (2007) [arXiv:hep-ph/0612241].
- [36] M. Dine and J. Mason, “Gauge mediation in metastable vacua,” arXiv:hep-ph/0611312.
- [37] R. Kitano, H. Ooguri and Y. Ookouchi, “Direct mediation of meta-stable supersymmetry breaking,” *Phys. Rev. D* **75**, 045022 (2007) [arXiv:hep-ph/0612139].
- [38] A. Giveon and D. Kutasov, “Stable and Metastable Vacua in SQCD,” arXiv:0710.0894 [hep-th].
- [39] N. Haba and N. Maru, “A Simple Model of Direct Gauge Mediation of Metastable Supersymmetry Breaking,” arXiv:0709.2945 [hep-ph].
- [40] K. Intriligator and N. Seiberg, “Lectures on Supersymmetry Breaking,” *Class. Quant. Grav.* **24**, S741 (2007) [arXiv:hep-ph/0702069]. S. A. Abel, C. Durnford, J. Jaeckel and V. V. Khoze, “Patterns of Gauge Mediation in Metastable SUSY Breaking,” arXiv:0712.1812 [hep-ph]. S. A. Abel, J. Jaeckel and V. V. Khoze, “Naturalised supersymmetric grand unification,” arXiv:hep-ph/0703086. H. Y. Cho and J. C. Park, “Dynamical  $U(1)_R$  Breaking in the Metastable Vacua,” *JHEP* **0709**, 122 (2007) [arXiv:0707.0716 [hep-ph]]. L. Ferretti, “R-symmetry breaking, runaway directions and global symmetries in O’Raifeartaigh models,” arXiv:0705.1959 [hep-th]. A. Katz, Y. Shadmi and T. Volansky, “Comments on the meta-stable vacuum in  $N(f) = N(c)$  SQCD and direct mediation,” *JHEP* **0707**, 020 (2007) [arXiv:0705.1074 [hep-th]]. R. Kitano, “Dynamical GUT breaking and mu-term driven supersymmetry breaking,” *Phys. Rev. D* **74**, 115002 (2006)

- [arXiv:hep-ph/0606129]. M. Dine and J. Mason, “Dynamical Supersymmetry Breaking and Low Energy Gauge Mediation,” arXiv:0712.1355 [hep-ph].
- S. Abel, C. Durnford, J. Jaeckel and V. V. Khoze, “Dynamical breaking of  $U(1)_R$  and supersymmetry in a metastable vacuum,” arXiv:0707.2958 [hep-ph].
- [41] K. Intriligator, N. Seiberg and D. Shih, “Supersymmetry Breaking, R-Symmetry Breaking and Metastable Vacua,” JHEP **0707**, 017 (2007) [arXiv:hep-th/0703281].
- [42] M. Dine, W. Fischler and M. Srednicki, “Supersymmetric Technicolor,” Nucl. Phys. B **189**, 575 (1981).
- [43] S. Dimopoulos and S. Raby, “Supercolor,” Nucl. Phys. B **192**, 353 (1981).
- [44] E. Poppitz and S. P. Trivedi, “New models of gauge and gravity mediated supersymmetry breaking,” Phys. Rev. D **55**, 5508 (1997). [arXiv:hep-ph/9609529].
- [45] N. Arkani-Hamed, J. March-Russell and H. Murayama, “Building models of gauge-mediated supersymmetry breaking without a messenger sector,” Nucl. Phys. B **509**, 3 (1998). [arXiv:hep-ph/9701286].
- [46] H. Murayama, “A model of direct gauge mediation,” Phys. Rev. Lett. **79**, 18 (1997). [arXiv:hep-ph/9705271].
- [47] S. Dimopoulos, G. R. Dvali, R. Rattazzi and G. F. Giudice, “Dynamical soft terms with unbroken supersymmetry,” Nucl. Phys. B **510**, 12 (1998). [arXiv:hep-ph/9705307].
- [48] N. Okada, “A simple model of gauge mediated supersymmetry breaking with composite messenger fields,” Phys. Lett. B **423**, 305 (1998). [arXiv:hep-ph/9711267].
- [49] K. Agashe, “An improved model of direct gauge mediation,” Phys. Lett. B **435**, 83 (1998). [arXiv:hep-ph/9804450].

- [50] M. Dine and W. Fischler, *Phys. Lett. B* 110, 227 (1982); L. Alvarez-Gaume, M. Claudson and M. B. Wise, *Nucl. Phys. B* 207, 96 (1982); S. Dimopoulos and S. Raby, *Nucl. Phys. B* 219, 479 (1983).
- [51] M. Dine, A. E. Nelson and Y. Shirman, *Phys. Rev. D* 51, 1362 (1995); M. Dine, A. E. Nelson, Y. Nir and Y. Shirman, *Phys. Rev. D* 53, 2658 (1996).
- [52] F. q. Xu and J. M. Yang, “An Extension for Direct Gauge Mediation of Metastable Supersymmetry Breaking,” arXiv:0712.4111 [hep-ph].
- [53] A. Liddle and D. Lyth, “Cosmological Inflation and Large-Scale Structure,” Cambridge University Press, 2000.
- [54] A. D. Linde, “Particle Physics and Inflationary Cosmology,” CRC Press, 1990. see also [arXiv:hep-th/0503203].
- [55] E. W. Kolb and M. S. Turner, “The Early Universe,” Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [56] A. H. Guth, “The Inflationary Universe: A Possible Solution To The Horizon And Flatness Problems,” *Phys. Rev. D* **23**, 347 (1981).
- [57] A. D. Linde, “A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution Of The Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy And Primordial Monopole Problems,” *Phys. Lett. B* **108**, 389 (1982).
- [58] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, “Cosmology For Grand Unified Theories With Radiatively Induced Symmetry Breaking,” *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220 (1982).
- [59] A. H. Guth and S. Y. Pi, “Fluctuations In The New Inflationary Universe,” *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 1110.
- [60] S. W. Hawking, *Phys. Lett. B* 115 (1982) 295.
- [61] A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* 117 (1982) 175.

- [62] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt and M. S. Turner, “Spontaneous Creation Of Almost Scale - Free Density Perturbations In An Inflationary Universe,” *Phys. Rev. D* **28**, 679 (1983).
- [63] E. D. Stewart and D. H. Lyth, “A More accurate analytic calculation of the spectrum of cosmological perturbations produced during inflation,” *Phys. Lett. B* **302**, 171 (1993) [arXiv:gr-qc/9302019].
- [64] A. Linde, “Fast-roll inflation,” *JHEP* **0111**, 052 (2001) [arXiv:hep-th/0110195].
- [65] A. D. Linde, “Chaotic Inflation,” *Phys. Lett. B* **129**, 177 (1983).
- [66] A. Linde, “Inflation and string cosmology,” eConf **C040802**, L024 (2004) [*J. Phys. Conf. Ser.* **24**, 151 (2005 PTPSA,163,295-322.2006)] [arXiv:hep-th/0503195].
- [67] A. D. Linde, “Hybrid inflation,” *Phys. Rev. D* **49**, 748 (1994) [arXiv:astro-ph/9307002].
- [68] D. H. Lyth and A. Riotto, “Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation,” *Phys. Rept.* **314**, 1 (1999) [arXiv:hep-ph/9807278].
- [69] G. R. Dvali, Q. Shafi and R. K. Schaefer, “Large scale structure and supersymmetric inflation without fine tuning,” *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1886 (1994) [arXiv:hep-ph/9406319].
- [70] L. Randall, M. Soljatic and A. H. Guth, “Supernatural Inflation: Inflation from Supersymmetry with No (Very) Small Parameters,” *Nucl. Phys. B* **472**, 377 (1996) [arXiv:hep-ph/9512439].
- [71] S. Dimopoulos, G. R. Dvali and R. Rattazzi, “Dynamical inflation and unification scale on quantum moduli spaces,” *Phys. Lett. B* **410**, 119 (1997) [arXiv:hep-ph/9705348].

- [72] G. G. Ross and S. Sarkar, “Successful supersymmetric inflation,” Nucl. Phys. B **461**, 597 (1996) [arXiv:hep-ph/9506283].
- [73] D. N. Spergel *et al.* [WMAP Collaboration], “Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: Implications for cosmology,” Astrophys. J. Suppl. **170**, 377 (2007) [arXiv:astro-ph/0603449].
- [74] M. Bastero-Gil, S. F. King and Q. Shafi, “Supersymmetric hybrid inflation with non-minimal Kaehler potential,” Phys. Lett. B **651**, 345 (2007) [arXiv:hep-ph/0604198].
- [75] E. W. Kolb, A. D. Linde and A. Riotto, “GUT baryogenesis after preheating,” Phys. Rev. Lett. **77**, 4290 (1996) [arXiv:hep-ph/9606260].
- [76] G. W. Anderson, A. D. Linde and A. Riotto, “Preheating, supersymmetry breaking and baryogenesis,” Phys. Rev. Lett. **77**, 3716 (1996) [arXiv:hep-ph/9606416].
- [77] I. Affleck and M. Dine, “A New Mechanism For Baryogenesis,” Nucl. Phys. B **249**, 361 (1985).
- [78] M. Dine, L. Randall and S. D. Thomas, “Supersymmetry breaking in the early universe,” Phys. Rev. Lett. **75**, 398 (1995) [arXiv:hep-ph/9503303].
- [79] M. Dine, L. Randall and S. D. Thomas, “Baryogenesis From Flat Directions Of The Supersymmetric Standard Model,” Nucl. Phys. B **458**, 291 (1996) [arXiv:hep-ph/9507453].
- [80] K. Enqvist and A. Mazumdar, “Cosmological consequences of MSSM flat directions,” Phys. Rept. **380**, 99 (2003) [arXiv:hep-ph/0209244].
- [81] T. Gherghetta, C. F. Kolda and S. P. Martin, Nucl. Phys. B **468**, 37 (1996) [arXiv:hep-ph/9510370].
- [82] F. q. Xu and J. M. Yang, “Constraints on hybrid inflation from flat directions in supersymmetry,” Phys. Lett. B **643**, 127 (2006) [arXiv:hep-ph/0608315].

- 
- [83] D. Tytler, S. Burles, and D. Kirkham, arXiv: astro-ph/9612121.
- [84] A. D. Sakharov, *Pis'ma ZhETF* **5**, 32 (1967).
- [85] K. R. Dienes and C. F. Kolda, "Twenty open questions in supersymmetric particle physics," arXiv:hep-ph/9712322.
- [86] J. A. Casas, A. Lleyda and C. Munoz, "Strong constraints on the parameter space of the MSSM from charge and color breaking minima," *Nucl. Phys. B* **471**, 3 (1996) [arXiv:hep-ph/9507294].
- [87] K. Enqvist, and J. McDonald, *Phys. Lett. B* **425**, 309 (1998) [arXiv:hep-ph/9711514].
- [88] A. Kusenko, and M. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett. B* **418**, 46 (1998) [arXiv:hep-ph/9709492].
- [89] S. Coleman, *Nucl. Phys. B* **262**, 263 (1985); Erratum-ibid. *B* **269**, 744 (1986).
- [90] F. Wang, chapter 5 in "Supersymmetric Dark Matter," Ph.D. Thesis, 2005.
- [91] P. Binetruy and G. Dvali, *Phys. Lett. B* **388**, 241 (1996);
- [92] E. Halyo, *Phys. Lett. B* **387**, 43 (1996).
- [93] M. Dine, N. Seiberg and E. Witten, *Nucl. Phys. B* **289**, 589 (1987); J. Atick, L. Dixon and A. Sen, *Nucl. Phys. B* **292**, 109 (1987).
- [94] C. F. Kolda and J. March-Russell, "Supersymmetric D-term inflation, reheating and Affleck-Dine baryogenesis," *Phys. Rev. D* **60**, 023504 (1999) [arXiv:hep-ph/9802358].
- [95] K. Enqvist, A. Jokinen, S. Kasuya and A. Mazumdar, "MSSM flat direction as a curvaton," *Phys. Rev. D* **68**, 103507 (2003) [arXiv:hep-ph/0303165].



## 发表文章目录

- [1] Fuqiang Xu and Jin Min Yang, “An Extension for Direct Gauge Mediation of Metastable Supersymmetry Breaking,” arXiv:0712.4111 [hep-ph].
- [2] Fei Wang, Wenyu Wang, Fuqiang Xu, Jin Min Yang and Huanjun Zhang, “Virtual effects of split SUSY in Higgs productions at linear colliders,” Eur. Phys. J. C **51**, 713 (2007) [arXiv:hep-ph/0612273].
- [3] Fuqiang Xu and J. M. Yang, “Constraints on hybrid inflation from flat directions in supersymmetry,” Phys. Lett. B **643**, 127 (2006) [arXiv:hep-ph/0608315].



# 简 历

## 基本情况

徐富强, 男, 浙江永康, 1980年8月出生, 未婚, 中国科学院理论物理研究所  
在读研究生.

## 教育状况

1998年9月至2002年7月, 浙江大学物理系, 本科.

2002年9月至2005年7月, 浙江大学物理系, 硕士, 专业: 场论与粒子物  
理.

2005年9月至当前, 中国科学院理论物理研究所, 博士生, 专业: 场论与粒  
子物理.

## 工作经历

无。

## 研究兴趣

超对称破缺及其唯象, 超对称暴涨模型, 重子起源.

## 联系方式

通讯地址: 北京市 3810 信箱, 中科院理论物理研究所

邮编: 100190

E-mail: xfq@itp.ac.cn



## 致 谢

回顾理论所三年自己经历的种种,我首先想感谢理论所,它营造的生活和学术环境.再是感谢我的导师杨金民研究员,他严谨的治学态度和一丝不苟的工作风格,特别是他的勤奋让人肃然起敬.杨老师为人宽厚,心态平和.感谢杨老师生活中的照顾.另外我也非常感谢罗民兴,刘纯,李田军,蔡荣根,马建平,张肇西,等等老师的指导和他们的精彩学术报告.感谢那些师兄师姐师妹们.他们是曹俊杰,柳国丽,王飞,王雯宇,王磊,韩小芳,张焕君,衡昭霞,冯磊等.特别感谢那些平时经常讨论的同伴.他们是徐卫水,杨刚,桑文龙,王黎明,康昭峰,刘昌勇等等.还要感谢那些三年之中一起度过的曾经的和现在的同学:熊爱民,郭媛媛,李丽,张益,苏方,桑华正,郭宗宽,马永亮,肖咏,温从烤,蔡本庚,王庸,张珠峰,刘绍敏,苏奇平,吴伟,郑思波等等.最后感谢我的家人,感谢父母和妹妹无私的爱.